2025

قلب الأم

سما SAMA

الفصل الدراسي الثاني

مؤسسة سما التعليمية

حولي مجمع بيروت الدور الأول

المادة

الرياضيات

الصف

ثاني عشر علمي

إجابة

سما SAMA

لطلب المذكرات
60084568

www.samakw.com

أ/ وليد حسين

للاشتراك بالمراجعات الحضورية
50855008

@samakw_net

$$\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(1-\frac{2}{x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int 1-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^4}\, dx$$

$$= \int 1-4x^{-2}+4x^{-4}\, dx$$

$$= x+4x^{-1}-\frac{4}{3}x^{-3}+C$$

$$= x+\frac{4}{x}-\frac{4}{3x^3}+C$$

$$\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\, dx$$

$$= \int \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}\, dx$$

$$= \int (x-3)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2-3x+C$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\, dx = \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\, dx$$

$$= \int \sqrt{x}-1\, dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}-1\, dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$$

$$\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}\, dx = \int \frac{x(x^3-27)}{x(x-3)}\, dx$$

$$= \int \frac{x^3-27}{(x-3)}\, dx$$

$$= \int \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}\, dx$$

$$= \int x^2+3x+9\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+C$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx = \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)}\, dx$$

$$= \int (\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)\, dx$$

$$= \int x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1\, dx$$

$$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x+C$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+x+C$$

$$\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{5}{x^{\frac{2}{3}}}\, dx$$

$$= 3\int x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{-\frac{2}{3}}\, dx$$

$$= 3\,\tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 5\cdot 3x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} - 15\sqrt[3]{x} + C$$

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\, dx$$

$u = \frac{1}{x} + 4$

$du = \frac{-1}{x^2}\, dx$

$-du = \frac{1}{x^2}\, dx$

$$= -\int u^5\, du$$

$$= -\frac{1}{6}u^6 + C$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6 + C$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\, dx$$

$u = \sqrt{x} + 2$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$2du = \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \frac{5\cdot 2}{u^3}\, du$$

$$= 10\int u^{-3}\, du = \frac{10}{-2}u^{-2} + C$$

$$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

$$\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$$

$u = x^3-3x+5$

$du = (3x^2-3)\,dx$

$du = 3(x^2-1)\,dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2-1)\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}\sqrt{u^3} + c$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-3x+5)^3} + c$$

أوجد: $\int x(2x-1)^3\,dx$

$u = 2x-1$

$du = 2\,dx$

$dx = \frac{1}{2}\,du$

$x = \frac{u+1}{2}$

$$= \int \frac{u+1}{2}\,u^3\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^4+u^3)\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{4}u^4\right) + c$$

$$= \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + c$$

أوجد: $\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$

$u = 3+x^2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$x^2 = u-3$

$x^4 = (u-3)^2$

$x^4 = u^2-6u+9$

$$= \int x^4 \cdot x\sqrt{3+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^2-6u+9)\,u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 6\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 9\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}(x^2+3)^{\frac{5}{2}} + 3(x^2+3)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{(3+x^2)^7} - \frac{6}{5}\sqrt{(x^2+3)^5} + 3\sqrt{(x^2+3)^3} + c$$

$$\int x(x+1)^5 dx$$

$u = x+1$

$du = dx$

$x = u-1$

$\int (u-1) u^5 \, du$

$= \int (u^6 - u^5) \, du$

$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{6}u^6 + C$

$= \frac{1}{7}(x+1)^7 - \frac{1}{6}(x+1)^6 + C$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx = \int x^3 x^2 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$$

$u = x^3+1$

$du = 3x^2 dx$

$\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$x^3 = (u-1)$

$= \frac{1}{3}\int (u-1) u^{\frac{1}{3}} du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}} du$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right) + C$

$= \frac{1}{7}\sqrt[3]{(x^3+1)^7} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3+1)^4} + C$

$$\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5\sin 3x\right) dx$$

$= \frac{1}{x} + -\frac{5}{3}\cos 3x + C$

$= \frac{1}{x} - \frac{5}{3}\cos 3x + C$

أوجد :

$$\int (x^2 + \cos 2x) dx$$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

أوجد:

$$\int x \sec^2(x^2+2) dx$$

$u = x^2+2$

$du = 2x \, dx$

$\frac{du}{2} = x \, dx$

$= \int \sec^2(u) \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}(\tan(u)) + C$

$= \frac{1}{2}\tan(x^2+2) + C$

$$\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$$

$u = \tan x$
$du = \sec^2 x \, dx$

$\int u \, du$
$= \frac{1}{2}u^2 + C$
$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

$$\int \sin^5(x+1) \cdot \underbrace{\cos(x+1)dx}_{du}$$

$u = \sin(x+1)$
$du = \cos(x+1)\,dx$

$\int u^5 \, du = \frac{1}{6}u^6 + C$
$= \frac{1}{6}(\sin(x+1))^6 + C$

$$\int (3+\sin 2x)^5 \underbrace{\cos 2x \, dx}_{\frac{1}{2}du}$$

$u = 3 + \sin 2x$
$du = 2\cos 2x \, dx$
$\frac{1}{2}du = \cos(2x)\,dx$

$\int u^5$
$= \frac{1}{6}u^6 + C$
$= \frac{1}{6}(3+\sin 2x)^6 + C$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$u = \cos x$
$du = -\sin x \, dx$
$-du = \sin x \, dx$

$= \int \sin x \cos^{-3} x \, dx$
$= -\int u^{-3} \, du$
$= -\frac{1}{-2}u^{-2} + C = \frac{1}{2(\cos x)^2} + C$

$$\int \sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx$$

$u = 1+\sin x$

$du = \cos x\,dx$

$= \int (1+\sin x)^{\frac{1}{2}} \cos x\,dx$

$= \int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$

$$\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x\,dx$$

$u = \cot x$

$du = -\csc^2 x\,dx$

$-du = \csc^2 x\,dx$

$= -\int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= -\frac{2}{3}(\cot x)^{\frac{3}{2}} + C$

$= -\frac{2}{3}\sqrt{(\cot x)^3} + C$

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$$

$u = 1+\tan x$

$du = \sec^2 x\,dx$

ملاحظة: $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

$= \int (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}\sec^2 x\,dx$

$= \int u^{-\frac{1}{2}}\,du$

$= 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1+\tan x} + C$

أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

$u = \csc x$

$du = -\csc x \cdot \cot x \, dx$

$-du = \csc x \cdot \cot x \, dx$

$= -\int \csc^4 x \cdot \csc x \cdot \cot x \, dx$

$= -\int u^4 \, du$

$= -\frac{1}{5}u^5 + C = \frac{-1}{5}(\csc x)^5 + C$

أوجد $\frac{dy}{dx}$.

$y = e^{\csc x}$ $y' = -\csc x \cdot \cot x \; e^{\csc x}$	$y = 5^{\sqrt{x+1}}$ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 5^{\sqrt{x+1}} \cdot \ln(5)$
$y = \ln(\ln x)$ $y' = \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$	$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $= \ln(1) - \ln(x^2)$ $= 0 - 2\ln x$ $= \frac{-2}{x}$
$y = 8^{\tan x}$ $y' = \sec^2 x \cdot 8^{\tan x} \cdot \ln(8)$	$y = \ln(2 - \cos x)$ $y' = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$

$$\int (2x+1)e^{x^2+x+4}\,dx$$

$u = x^2+x+4$
$du = (2x+1)\,dx$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$
$$= e^{x^2+x+4} + C$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$u = e^x+1$, $du = e^x\,dx$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$= \ln|e^x+1| + C$$
$$= \ln(e^x+1) + C$$

$$\int (\cot x + x^2)\,dx$$

$u = \sin x$
$du = \cos x\,dx$

$$= \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} + x^2\right) dx$$
$$= \int \frac{du}{u} + \int x^2\,dx$$
$$= \ln|u| + \frac{1}{3}x^3 + C$$
$$= \ln|\sin x| + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}\,dx$$

$u = x^4 - 2x^2$
$du = 4x^3 - 4x\,dx$
$du = 4(x^3-x)\,dx$
$\frac{1}{4}du = (x^3-x)\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{4}\ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x^4-2x^2| + C$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$u = \cos x$
$du = -\sin x\,dx$
$-du = \sin x\,dx$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x| + C$$

أوجد: $\int x\cos x\,dx$

$u = x \quad dv = \cos x\,dx$
$du = dx \quad v = \sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$$

$u = 3x \quad dv = e^{2x+1}\,dx$
$du = 3\,dx \quad v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$
$$\int 3x\,e^{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$$

$$\int (x-3)e^{x-3}\,dx$$

$u = (x-3) \quad dv = e^{x-3}\,dx$
$du = dx \quad v = e^{x-3}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int (x-3)\,e^{x-3}\,dx = (x-3).e^{x-3} - \int e^{x-3}\,dx$$
$$= (x-3)\,e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

$$\int x \ln x \, dx$$

$u = \ln(x) \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$

$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

$\int x \ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\cdot x^2\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$

أوجد: $\int x^2 \sin x\,dx$

SAMA

$u = x^2 \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x \cos x\,dx$

$u = 2x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2\,dx \qquad v = \sin x$

$= -x^2 \cos x + \left[2x\sin x - 2\int \sin x\,dx\right]$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

أوجد: $\int x^2 e^{x+2}\,dx$

$u = x^2 \qquad dv = e^{x+2}\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = e^{x+2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x^2 e^{x+2}\,dx = x^2 e^{x+2} - \int 2x\, e^{x+2}\,dx$

$u = 2x \qquad dv = e^{x+2}\,dx$

$du = 2\,dx \qquad v = e^{x+2}$

$= x^2 e^{x+2} - \left[2x\, e^{x+2} - \int 2\, e^{x+2}\,dx\right]$

$= x^2 e^{x+2} - 2x e^{x+2} + 2\, e^{x+2} + C$

SAMA

$\int (x^2 - 2x)\cos x\,dx$

$u = (x^2 - 2x) \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = (2x - 2)\,dx \qquad v = \sin x$

$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

$\int (x^2 - 2x)\cos x\,dx = (x^2 - 2x)\cdot \sin x - \int (2x-2)\sin x\,dx$

$u = 2x - 2 \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = 2\,dx \qquad v = -\cos x$

$= (x^2 - 2x)\sin x - \left[-(2x-2)\cos x + \int 2\cos x\,dx\right]$

$= (x^2 - 2x)\sin x + (2x-2)\cos x - 2\sin x + C$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = \frac{1}{x^2}dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = -\frac{1}{x}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= -\frac{1}{x}\ln(x) + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= -\frac{1}{x}\ln(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} + C$

SAMA

$$I = \int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\ln(x)\,dx$$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = x^{-\frac{1}{3}}dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln(x) - \int \frac{3}{2}\,\frac{1}{x}\,x^{\frac{2}{3}}\,dx$

$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln(x) - \frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln(x) - \frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}} + C$

$$\int x^2\ln x^2\,dx = \int 2x^2\ln(x)$$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = 2x^2$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{2}{3}x^3$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x^2\ln(x^2)\,dx = \frac{2}{3}x^3\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{2}{3}x^3\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^2\,dx$

$= \frac{2}{3}x^3\ln(x) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C$

$= \frac{2}{3}x^3\ln(x) - \frac{2}{9}x^3 + C$

$$\int x\cos(3x)\,dx$$

$u = x \qquad dv = \cos(3x)\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\sin(3x)$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{3}\cos(3x) + C$$

$$= \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$$

أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)\,dx$.

$$f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-3}$$

$$2 = A(x-3) + B(x-5)$$

$x = 3 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$

$x = 5 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

الكسور الجزئية

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-5| - \ln|x-5| + C$$

لتكن الدالة f : $$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$$

فأوجد :

(1) الكسور الجزئية

(2) $\int f(x)dx$

$$f(x) = \frac{2}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$$

$$2 = A(x-1) + B(x-3)$$

$\boxed{x=1} \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$

$\boxed{x=3} \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

الكسور الجزئية $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-1}$

(2) $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-1}\,dx$

$= \ln|x-3| - \ln|x-1| + C$

لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

(a)

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$$

بالضرب في $(x-3)(x-1)$ $\quad 2x-1 = A(x-1) + B(x-3)$

$x=1 \Rightarrow \quad 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$x=3 \Rightarrow \quad 5 = 2A \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

$$f(x) = \frac{\frac{5}{2}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}$$ الكسور الجزئية

(b)

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}}{(x-3)} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

$$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$$

$$f(x) = \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$-x^2+2x+4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$x=0 \Rightarrow 4 = 4A + 0 + 0 \Rightarrow A=1$$

$$x=2 \Rightarrow 4 = 2C \Rightarrow C=2$$

$$x=1 \Rightarrow -1+2+4 = 1(1-2)^2 + B(1)(1-2) + 2(1)$$

$$5 = 1 - B + 2 \Rightarrow B=-1$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

SAMA

أوجد: $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2-4x+4 \overline{\smash{)}\,x^2-3x+7} \\ -\,x^2 \pm 4x \mp 4 \\ \hline x+3 \end{array}$$

$$f(x) = 1 + \frac{x+3}{x^2-4x+4}$$

$$g(x) = \frac{x+3}{x-4x+4} = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$x+3 = A(x-2)+B$$

$x=2 \Rightarrow \quad 5 = B$

$x=0 \Rightarrow \quad 3 = -2A+5 \Rightarrow -2=-2A \Rightarrow A=1$

$$f(x) = 1 + \frac{+1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

$$\int f(x)\,dx = \int 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+9}\,dx$$

$$= \int 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= x + \int \frac{9x-7}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= x + \int \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{(x-3)}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-6x+9 & x^2+3x+2 \\ & -x^2 \mp 6x \pm 9 \\ \hline & 9x-7 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A(x-3) + B$$

$$x = 3 \Rightarrow \boxed{20 = B}$$

$$x = 0 \Rightarrow -7 = -3A + 20$$

$$-3A = -7 - 20$$

$$\boxed{A = 9}$$

$$\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx = \left[3e^x + e\ln|x|\right]_1^2$$

$$= 3e^2 + e\ln(2) - 3e - e\ln(1)$$

$$= 3e^2 + e\ln(2) - 3e$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\csc^2 x\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\cos(2x) + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\cos(\pi) + \cot\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{4} + 0\right) - (0 + 1) = -\frac{3}{4}$$

$$\int_{-3}^{4}|2x-4|\,dx$$

$2x - 4 = 0$

$x = 2$

$-3 \quad - \quad 2 \quad + \quad 4$

$$= -\int_{-3}^{2}(2x-4)\,dx + \int_{2}^{4}(2x-4)\,dx$$

$$= \left(-x^2+4x\right)_{-3}^{2} + \left(x^2-4x\right)_{2}^{4}$$

$$= (-4+8) - (-9-12) + (16-16) - (4-8)$$

$$= 4 + 21 + 4 = 29$$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx \leqslant 0$

نفرض $f(x)=x^2+x$

* f كثيرة حدود متصلة على R ∴ متصلة على $[-1,0]$

* ندرس اشارة $f(x)$ ∴ $x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

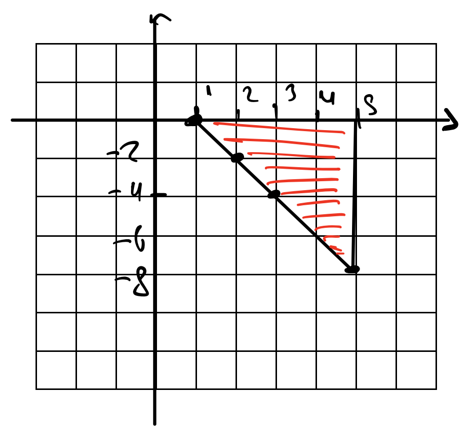
∴ $x=0$ ، $x=-1$

∴ $f(x)=x^2+x \leqslant 0 \quad \forall x \in [-1,0]$

∴ $\int f(x)dx = \int x^2+x\,dx \geqslant 0$

أوجد قيمة $\int_{1}^{5}(2-2x)dx$ بيانيًّا.

x	$y=2-2x$
1	0
3	-4
5	-8



$\int_{1}^{5}(2-2x)dx = -$ مساحة المثلث

$=-16$

مساحة المثلث $=\frac{1}{2}bh$

$=\frac{1}{2}4(8)$

$=16$ وحدة مربعة

$$\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{9\pi}{4}$$

$y = -\sqrt{9-x^2}$

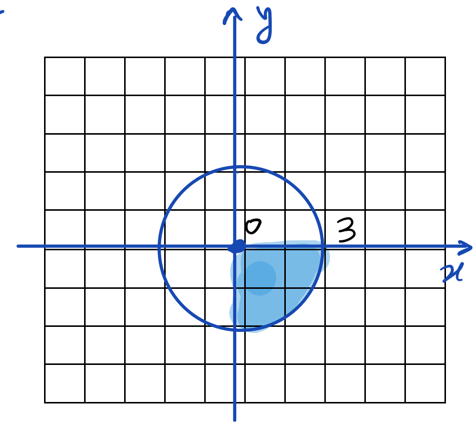
$y^2 = 9 - x^2$

$x^2 + y^2 = 9$

معادلة دائرة مركزها (0,0)

وطول نصف قطرها

$r = 3$



$$\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$$

$$= \frac{25\pi}{2}$$

$y = \sqrt{25-x^2}$

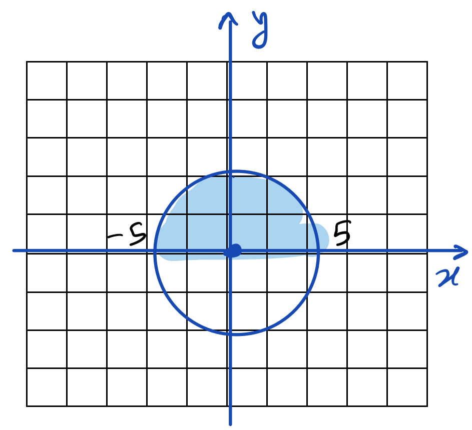
$y^2 = 25 - x^2$

$x^2 + y^2 = 25$

معادلة دائرة مركزها (0,0)

وطول نصف قطرها

$r = 25$



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx$$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x\,dx$

$x = 0 \Rightarrow u = \tan(0) = 0$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

$$= \int_0^1 u\,du$$

$$= \left(\frac{u^2}{2}\right)_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$$

$u = x+1$
$du = dx$
$x = u-1$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$
$x = 1 \Rightarrow u = 4$

$$= \int_1^4 (u-1)\, u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int_1^4 u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left(\frac{-4}{15}\right) = \frac{116}{15}$$

أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\,dx$
$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$= \int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\,dx = \left(-x\, e^{-x}\right)_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx$$

$$= \left(-x\, e^{-x} - e^{-x}\right)_{-2}^{0} = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 - 1$$

أوجد: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\, dx$

$u = x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$
$du = dx \qquad v = \tan x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = (x\tan x)_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

$$= \left[x\tan x + \ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4}(1) + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - (0) = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= -\ln|\cos x| + c$$

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$$

$u = \ln(x)$
$du = \frac{1}{x}\,dx$
$x = 1 \Rightarrow u = \ln(1) = 0$
$x = e \Rightarrow u = \ln(e) = 1$

$\int_0^1 u^6\,du$

$= \left(\frac{u^7}{7}\right)_0^1 = \frac{1}{7} - 0$

$= \frac{1}{7}$

$$\int_e^6 \frac{dx}{x\ln x} =$$

$u = \ln(x)$
$du = \frac{1}{x}\,dx$
$x = e \Rightarrow u = \ln(e) = 1$
$x = 6 \Rightarrow u = \ln(6)$

$\int_1^{\ln 6} \frac{du}{u} = \left(\ln|u|\right)_1^{\ln(6)}$

$= \ln(\ln(6)) - 0$

$= \ln(\ln(6))$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x+4)(x+1) = 0$

$x = -4 \quad , \quad x = -1$

$$A = \left| \int_{-4}^{-1} x^2 + 5x + 4 \, dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 4x \right)_{-4}^{-1} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{-1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{80}{3} - 16 \right) \right| = \frac{9}{2} \text{ وحدة مربعة}$$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المحددة:

$f(x) = x^3 - 6x \ , \ [0,3]$

$x^3 - 6x = 0$

$x(x^2 - 6) = 0$

$x = 0 \qquad x = \mp\sqrt{6}$

$$A = \left| \int_0^{\sqrt{6}} x^3 - 6x \, dx \right| + \left| \int_{\sqrt{6}}^{3} x^3 - 6x \, dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2 \right)_0^{\sqrt{6}} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2 \right]_{\sqrt{6}}^{3} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{\sqrt{6}^4}{4} - 3(\sqrt{6}) \right) - (0) \right| + \left| \left(\frac{3^4}{4} - 3(3)^2 \right) - \left(\frac{\sqrt{6}^4}{4} - 3\sqrt{6}^2 \right) \right|$$

$$= 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4} \text{ وحدة م2}$$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$

والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

$$g(x) \neq f(x)$$

$$A = \left| \int_0^3 f(x) - g(x)\, dx \right| = \left| \int_0^3 e^x + 1 + x^2\, dx \right|$$

$$= \left| \left(e^x + x + \frac{x^3}{3} \right)_0^3 \right|$$

$$= \left| \left(e^3 + 3 + \frac{3^3}{3} \right) - \left(e^0 + 0 \right) \right|$$

$$= \left| e^3 + 3 + 9 - 1 \right| = e^3 + 11$$ وحدة مربعة

SAMA سما

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5$, $y_1 = x^2 + 2$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 + 2 = -2x + 5$$

$$x^2 + 2x + 2 - 5 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = -1$$

$$A = \left| \int_{-1}^3 y_1 - y_2\, dx \right| = \left| \int_{-1}^3 x^2 + 2x - 3\, dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right)_{-1}^3 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 - 3(3) \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 - 3(-1) \right) \right|$$

$$= \left| (9 + 9 - 9) - \left(\frac{-1}{3} + 1 + 3 \right) \right| = \frac{16}{3}$$ وحدة مربعة

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$،

والمستقيم $x = 2$ ومحور السينات.

$f(x) = g(x)$ $\therefore \frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x^3 = 1$

$\therefore x = 1$

$A = \left| \int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx \right|$

$A = \left| \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)_1^2 \right|$

$= \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)$

$= \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$y = \sqrt{r^2 - x^2} = 0 \Rightarrow x = \mp r$

$V = \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2}\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$

$= \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)_{-r}^{r}$

$= \pi \left[\left(r^3 - \frac{1}{3} r^3\right) - \left(-r^3 + \frac{1}{3} r^3\right)\right]$

$= \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{4}{3} \pi r^3$ وحدة مكعبة

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0, h]$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^h r^2 \, dx = \pi (r^2 x)_0^h$$

$$= \pi (r^2 h - r^2 (0))$$

$$= \pi r^2 h$$ وحدة مكعبة

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين g : $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$

$x^2 = \sqrt{x}$ نقاط تقاطع

$\therefore x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

$\therefore x = 0$ or $x = 1$

$x \in (0,1) \quad \therefore x = \frac{1}{4} \qquad f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$

$g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$

$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$$V = \pi \int_0^1 g^2(x) - f^2(x) \, dx = \pi \int_0^1 x - x^4 \, dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right)_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi$$ وحدة مكعبة

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$, $g(x) = \frac{x}{2} + 2$

نقط $x-2$

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$

$x^2 + 2 = x + 4$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2 \quad x = -1}$

$x = 0 \in [-1, 2] \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(0) = 1 \\ g(0) = 2 \end{matrix}\right) \therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 2]$

$V = \pi \int_{-1}^{2} g^2(x) - f^2(x)\, dx = \pi \int_{-1}^{2} (\frac{x}{2}+2)^2 - (\frac{x^2}{2}+1)^2 dx$

$V = \pi \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{4} + 2x + 4 - \frac{x^4}{4} - x^2 - 1\, dx$

$V = \pi \int_{-1}^{2} -\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 3\, dx$

$= \pi \left[-\frac{x^5}{20} - \frac{1}{4}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^{2} = \pi$

$= \pi \left[\left(-\frac{32}{20} - \frac{1}{4}(2)^3 + 4 + 6\right) - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + 1 - 3\right) \right] = \frac{81\pi}{10}$ وحدة مكعبة

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3$, $y_2 = x^2 + 1$

$V = \pi \int_{-1}^{2} y_1^2 - y_2^2\, dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^2 - (x^2+1)^2 dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1\, dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} -x^4 - x^2 + 6x + 8\, dx$

$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right)_{-1}^{2}$

$= \pi \left[\left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 3(4) + 16 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 \right) \right]$

$= \frac{117}{5}\pi$

$y_1 = y_2$

$x^2 + 1 = x + 3$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$ or $x = -1$

$x = 0 \in (-1, 2)$

$y_1(0) = 3$

$y_2(0) = 1$

$\therefore y_1 \geq y_2 \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 2]$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,6]$

$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot \frac{3}{2}(3+2x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=(3+2x)^{\frac{1}{2}}$

$f'^2(x)=3+2x$

$L=\int_0^6 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$=\int_0^6 \sqrt{1+3+2x}\,dx$

$=\int_0^6 (4+2x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(4+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$

$=\frac{1}{3}(4+2(6))^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(4)^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{56}{3}$ وحدة طول

SAMA سما

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x)=5+2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

$f(x)=5+2x^{\frac{3}{2}}$

$f'(x)=2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$f'^2(x)=9x$

$L=\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

$L=\int_0^{\frac{1}{3}} (1+9x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$L=\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{2}{27}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{2}{27}\left[\left(1+9\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{3}{2}}-(1)^{\frac{3}{2}}\right]$

$=\frac{14}{27}$ وحدة طول

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A(\frac{-\pi}{4}, \frac{5}{2})$

$f'(x) = \cos 2x$

$f(x) = \int f'(x)\, dx$

$f(x) = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

$x = \frac{-\pi}{4}$, $y = \frac{5}{2}$ $\therefore$ $\frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(2 \cdot \frac{-\pi}{4}\right) + C$

$\frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 3$

$\therefore \boxed{f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 3}$

وهي معادلة منحنى الدالة

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) يساوي $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5, 3)$

$f(x) = \int \frac{-1}{\text{ميل العمودي}}\, dx$ ميل العمودي $\neq 0$

$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}\, dx = -\int (5-4x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$f(x) = -2 \cdot -\frac{1}{4}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$

$f(x) = +\frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + C$

$A(-5, 3) \Rightarrow 3 = \frac{1}{2}\sqrt{5-4(-5)} + C$

$3 = \frac{5}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) هو $2x+5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2,3)$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\text{ميل العمودي}}\,dx$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x+5}\,dx =$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = -\frac{1}{2}\ln|2(-2)+5| + C$$

$$3 = -\frac{1}{2}\ln(1) + C \Rightarrow C=3$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x+5| + 3$$

SAMA

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

$$y' = 2x\,e^{x^2}$$

الطرف الأيسر $= y' - 2xy$

$= 2x\,e^{x^2} - 2x\,e^{x^2}$

$= 0$

$=$ الطرف الأيمن

$\therefore$ $y = e^{x^2}$ حل للمعادلة

حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ فصل المتغيرات

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + c$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c$$

$$|y| = e^{\ln(x^2)} \cdot e^c$$

$$|y| = e^c \cdot x^2$$

$$y = \mp e^c \cdot x^2$$

$$y = k x^2$$

نعرف $k = \mp e^c$

$\therefore$

SAMA

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

$y = ay \quad \therefore \quad a = 4$

$\therefore$ طول

$$y = k e^{ax}$$

$$\therefore y = k e^{4x}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = k(e^0) \Rightarrow k = 2$$

$$y = 2e^{4x}$$

حل الخاص

حل المعادلة $3y' - 2y = 4$، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

$3y' = 2y + 4 \quad \div 3$

$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

$a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$

وهي من الشكل $y' = ay + b$ وحلها $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

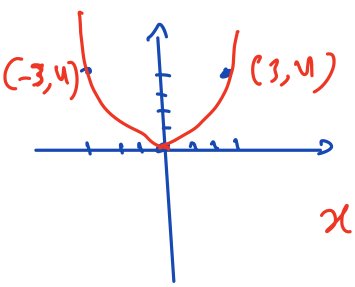
$\therefore \quad y = ke^{\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$

$y = ke^{\frac{2}{3}x} - 2$

$x = 0, \ y = 3 \Rightarrow 3 = ke^{0} - 2 \Rightarrow 3 + 2 = k \Rightarrow k = 5$

$\therefore \quad y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$ حل الخاص

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(-3,4)$, $B(3,4)$.



$\because$ رأس القطع هو $(0,0)$

ومحور تماثل القطع هو y-axis

$\therefore$ تكون معادلة القطع هي $x^2 = 4py$

$B(3,4) \in$ للقطع $\therefore \ 3^2 = 4p(4)$

$9 = 16p \Rightarrow p = \frac{9}{16}$

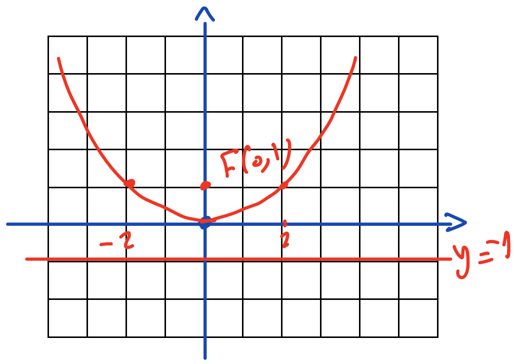
$\therefore \quad x^2 = 4\left(\frac{9}{16}\right)y$

$x^2 = \frac{9}{4}y$

وهي معادلة القطع المكافئ

أوجد البؤرة، والدليل، وخط تماثل القطع المكافئ. ارسم تخطيطاً للرسم البياني للقطع المكافئ.

المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$



$x^2 = 4y$

معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل

ومحور تماثله هو y - axis

$x^2 = 4py$

$x^2 = 4y$

$\therefore \quad 4p = 4$

$\therefore \quad p = 1 > 1$ أ

البؤرة $F(0, p) = F(0, 1)$

الدليل $y = -p$

$y = -1$

نأخذ نقطة مساعدة للرسم $y = 1$

$\Rightarrow \quad x^2 = 4(1)$

$x = \mp 2$

$\therefore \quad (\mp 2, 1) \in$ للقطع

تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$، فأين يجب وضع لمبة المصباح؟

يكون موضع لمبة المصباح في البؤرة $y^2 = 12x$

معادلة قطع مكافئ رأسه (0,0)

ومحور تماثله هو محور السينات

$y^2 = 4px$

$\therefore 4p = 12 \Rightarrow \boxed{p = 3}$

$\therefore$ البؤرة $F(p,0) = F(3,0)$

$\therefore$ موضع اللمبة في البؤرة $F(3,0)$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

$V_1F_1 + V_1F_2 = 10$، حيث إنّ V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_2 و F_1 هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$.

حسب تعريف القطع الناقص يكون $V_1F_1 + V_1F_2 = 20$

$\therefore 2a = 10 \Rightarrow a = 5$

$\because$ البؤرتين على محور السينات $\therefore$ المحور الأكبر للقطع ينطبق على محور السينات

$\therefore$ تكون المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\boxed{a = 5}$, $\boxed{c = 3}$

$c^2 = a^2 - b^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 25 - 9 = 16$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

وهي معادلة القطع الناقص ومركزه (0,0)

إذا كانت: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b البؤرتين.

c معادلة دليلي القطع.

d طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

مركز القطع $(0,0)$

المحور الأكبر للقطع ينطبق على محور الصادات

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$= 9 - 4 = 5$

رأسي القطع $A_1(0,-a) = A_1(0,-3)$

$A_2(0,+a) = A_2(0,3)$

طرفي المحور الأصغر $B_1(-b,0) = B_1(-2,0)$

$B_2(b,0) = B_2(2,0)$

البؤرتين $F(0, \mp c)$

$F(0, \mp\sqrt{5})$

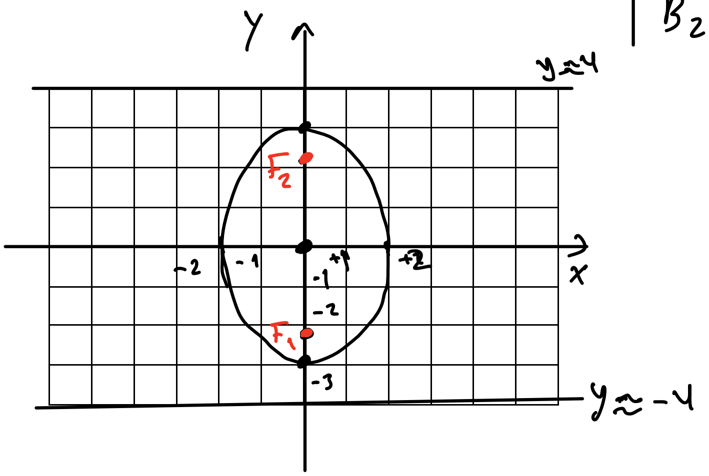
معادلة دليلي القطع الناقص

$y = \mp \frac{a^2}{c} = \mp \frac{9}{\sqrt{5}}$

(d)

طول المحور الأكبر $= 2a = 2(3) = 6$ وحدة طول

طول المحور الأصغر $= 2b = 2(2) = 4$



أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2 + 4y^2 = 16$

مركز القطع $(0,0)$

الحل

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

محور القطع الأكبر ينطبق على السينات

$a^2 = 16$

$b^2 = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$

$a = 4$ $b = 2$ $c = 2\sqrt{3}$

البؤرتين $F(\mp c, 0) = F(\mp 2\sqrt{3}, 0)$

الرأسين $A(\mp a, 0)$

$A(\mp 4, 0)$

طول المحور الأكبر $= 2a$

$= 2(4)$

$= 8$ وحدة طول

أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0, 0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm.

المركز $(0,0)$ والمحور الأكبر ينطبق على المحور الصادي

طول المحور الأكبر $= 2a = 16 \Rightarrow a = 8$

المسافة بين البؤرتين $= 2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$\therefore c^2 = a^2 - b^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

$= 64 - 25$

$= 39$

$\because$ المحور الأكبر ينطبق على الصادات $\therefore$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\therefore \frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{39} = 1$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F_1(-5,0)$

ورأساه $A_1(-3,0)$, $A_2(3,0)$ ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين

(٠،٠) مركز القطع الزائد ، المحور القاطع للقطع ينطبق على محور السينات

$A(\mp 3, 0) \Rightarrow \boxed{a=3}$

$F(-5, 0) \Rightarrow \boxed{c=5}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$25 = 9 + b^2$

$\boxed{b=4} \Leftarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore$ معادلة القطع

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

المقاربين $y = \mp \frac{b}{a} x$

$\therefore y = \mp \frac{4}{3} x$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\,,\,0)$ وإحدى بؤرتيه $F_1(0,-\sqrt{5})$

ومعادلة أحد خطيه المقاربين $y = 2x$.

مركز القطع (٠،٠)

والمحور القاطع للقطع ينطبق على محور الصادات

$F(0, -\sqrt{5})$ حيث

$c = \sqrt{5}$

$\therefore$ معادلة القطع

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

المقارب $\therefore y = \frac{a}{b} x$

$y = 2x$

$\therefore$

$2 = \frac{a}{b}$

$\therefore a = 2b$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\sqrt{5}^2 = (2b)^2 + b^2$

$5 = 5b^2$

$\Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$\therefore a = 2b$

$a = 2(1) = 2$

$\therefore$ معادلة القطع هي

$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين.

e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.

$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

مركز القطع $(0,0)$ ، والمحور القاطع ينطبق على محور السينات

$a^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

$c^2 = a^2 + b^2$
$= 16 + 9 = 25 \Rightarrow \boxed{c = 5}$

a رأسي القطع

$A_1(a, 0) = (4, 0)$
$A_2(-a, 0) = (-4, 0)$

b بؤرتي القطع

$F_1(c, 0) = F_1(5, 0)$
$F_2(-c, 0) = F_2(-5, 0)$

c معادلة دليل القطع

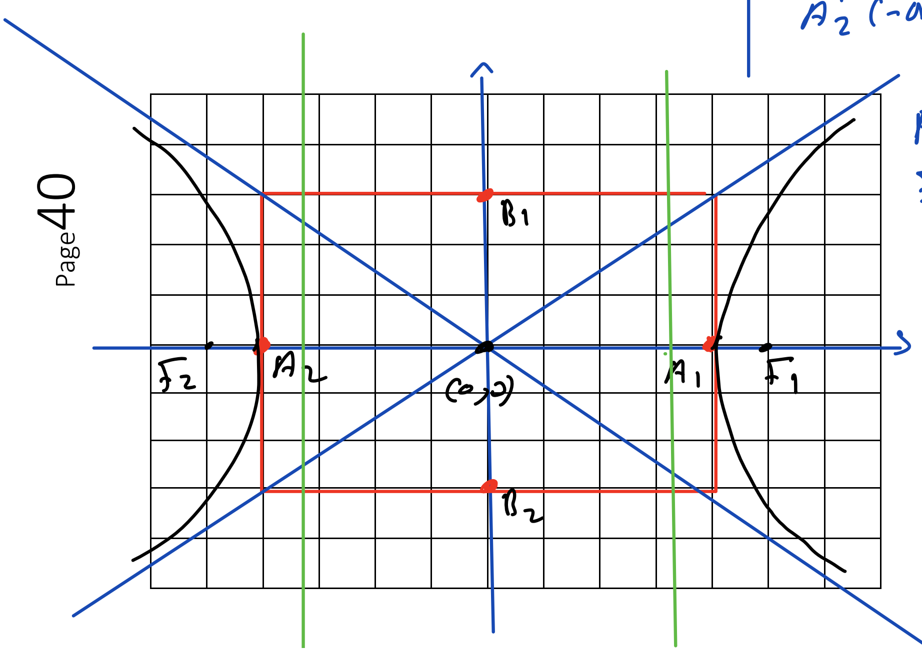
$x = \mp \frac{a^2}{c}$

$x = \mp \frac{16}{5}$

معادلة المقاربين

$y = \mp \frac{b}{a} x$

$y = \mp \frac{3}{4} x$



أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وأحد رأسيه $(-4,0)$ ويمر بالنقطة $(5,-2)$.

مركز القطع $(0,0)$
$\because$ $(-4,0)$ أحد رأسي القطع
$\therefore a=4$
والمحور القاطع للقطع ينطبق على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

النقطة $(5,-2)$ تقع على القطع

$$\therefore \frac{5^2}{4^2}-\frac{(-2)^2}{b^2}=1$$

$$\therefore \frac{4}{b^2}=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}$$

$$\therefore b^2=\frac{64}{9}$$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي

$$\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{64}=1$$

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

a اختلافه المركزي $\left(e=\frac{1}{2}\right)$ وإحدى بؤرتيه: $F(2,0)$

b اختلافه المركزي $(e=2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x=1$

(a) $\because e=\frac{1}{2}<1$ هو قطع ناقص

$$\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a=2c}$$

$\because$ $F(2,0)$ هي إحدى البؤرتين
$\therefore c=2$ ، المحور الأكبر للقطع ينطبق على السينات

$$\therefore a=2(2)=4$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b^2=4^2-2^2=12$$

$\therefore$ معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$ حيث مركزه $(0,0)$

(b) $e=2>1 \therefore$ هي معادلة القطع زائد

$$\frac{c}{a}=2 \Rightarrow \boxed{c=2a} \quad (1)$$

$\therefore$ معادلة الدليل $x=1$

$$=\frac{a^2}{c} \Rightarrow \boxed{\frac{a^2}{c}=1} \quad (2)$$

والمحور القاطع ينطبق على السينات

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

من (1) ، (2)

$$\frac{a^2}{2a}=1 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$\therefore c=2(2)=4$$

$\therefore$
$$c^2=a^2+b^2$$

$$b^2=c^2-a^2$$

$$b^2=16-4=12$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

$$24y^2 = 600 + 25x^2$$

$$\frac{24y^2}{600} - \frac{25x^2}{600} = \frac{600}{600}$$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$$

وهي معادلة قطع زائد

$a^2 = 25$, $b^2 = 24$

$c^2 = a^2 + b^2 = 24 + 25 = 49$

$\therefore \boxed{c = 7}$, $\boxed{a = 5}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5} = 1.4 > 1$

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

$\therefore e = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{c}{a}$ ، $2b =$ طول المحور الأصغر

$\boxed{c = \frac{\sqrt{5}}{3} a}$ ، $2b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$\therefore c^2 = a^2 - b^2$

$\left(\frac{\sqrt{5}a}{3}\right)^2 = a^2 - (2)^2$

$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$

$4 = a^2 - \frac{5}{9}a^2 \Rightarrow 4 = \frac{4}{9}a^2$

$\therefore a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$\therefore$ طول المحور الأكبر للقطع $= 2a$

$2a = 2(3) = 6$ وحدة طول

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن " عدد الكتابات " فأوجد ما يلي :

1) فضاء العينة (S) و عدد عناصره n(S) .

2) مدى المتغير العشوائي X .

3) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغيّر العشوائي X .

4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

① $S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H), (T, T, H), (T, H, T), (H, T, T), (T, T, T)\}$

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

② $X(S) = \{0, 1, 2, 3\}$

متقطع

③ $f(0) = P(X=0) = \frac{1}{8}$

$f(1) = P(X=1) = \frac{3}{8}$

$f(2) = P(X=2) = \frac{3}{8}$

$f(3) = P(X=3) = \frac{1}{8}$

④ دالة التوزيع الاحتمالي $f(x)$ للمتغير العشوائي x :

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن:
«مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4، و 1 – لغير ذلك».

فأوجد:

a فضاء العينة S وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad n(S) = 6$

عناصر فضاء العينة	عناصر مدى المتغير x
1	$1^2 - 1 = 0$
2	$2^2 - 1 = 3$
3	$3^2 - 1 = 8$
4	-1
5	-1
6	-1

x مدى $= X(S) = \{-1, 0, 3, 8\}$

$f(-1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$f(0) = \frac{1}{6}$

$f(3) = \frac{1}{6}$

$f(8) = \frac{1}{6}$

x	-1	0	3	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري (σ).

(a) التوقع

$$\mu = \sum x_i \cdot f(x_i)$$
$$= 1(0.2) + 2(0.1) + 3(0.3) + 4(0.1) + 5(0.3)$$
$$= 3.2$$

(b) التباين $\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$

$$\sigma^2 = 1^2(0.2) + 2^2(0.1) + 3^2(0.3) + 4^2(0.1) + 5^2(0.3) - (3.2)^2$$
$$= 2.16$$

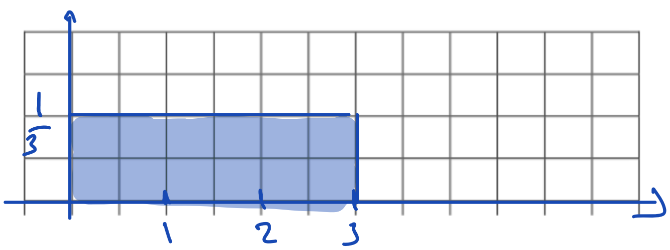
(c) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$

$$= \sqrt{2.16}$$
$$\approx 1.469$$
$$\approx 1.47$$

(a) لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

a) اثبت أن f هي دالة كثافة احتمال
b) اثبت أن f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم
c) أوجد التوقع والتباين للدالة f
d) $p(X \ge 2)$



(a) رياضيا = أنها دالة كثافة احتمال يجب أن نثبت أن المساحة تحت المنحنى = 1

المساحة $= \frac{1}{3}(3) = 1$

(b) لاثبات انها دالة توزيع احتمالي منتظم يجب أن تكون على الصورة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \le x \le b \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$a = 0 \quad , \quad b = 3$

$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3}$

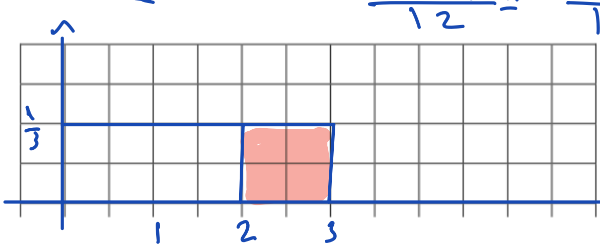
وبالتالي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$\therefore$ f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

(c) التوقع $\mu = \frac{b+a}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

التباين $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4}$



(d) $P(X \ge 2) =$ المساحة المظللة

$= \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

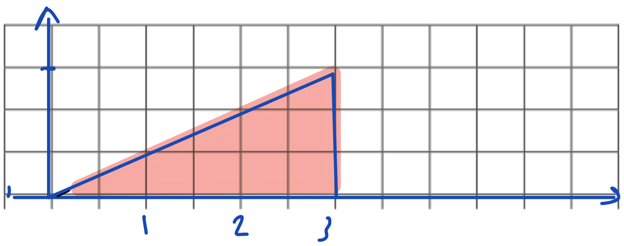
إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : 0 \le x \le 3 \\ 0 : & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد :

1) $p(0 < X \le 3)$ 2) $p(X \ge 2)$ 3) $P(X = 1)$

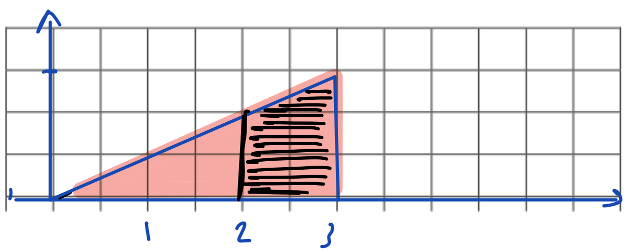
الحل :



① $p(0 < X \le 3) =$ المساحة المظللة

$=$ مساحة المثلث $= \frac{1}{2}(3) \cdot \frac{2}{9}(3)$

$= 1$



② $p(X > 2)$

$= 1 - p(X \le 2)$

$= 1 - \frac{1}{2}(2) \cdot \frac{2}{9}(2)$

$= \frac{5}{9}$

③ $p(X = 1) = 0$

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	-1	3	5	7
$F(x)$	0.1	0.45	0.7	1

أوجد:

(a) $P(-1 < X \leqslant 5)$

$= F(5) - F(-1)$

$= 0.7 - 0.1$

$= 0.6$

(b) $P(X > 3)$

$P(X>3) = 1 - F(3)$

$= 1 - 0.45$

$= 0.55$

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.14	0.16	0.35	0.15	0.2

أوجد باستخدام دالة التوزيع التراكمي F: $F(2)$, $F(3)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(6)$, $F(7)$

$* \; F(2) = P(X \leq 2) = 0.14$

$* \; F(3) = P(X \leq 3) = f(3) + f(2)$

$= 0.14 + 0.16 = 0.3$

$* \; F(3.5) = F(3) = 0.3$

$F(4) = P(X \leq 4) = f(4) + f(3) + f(2)$

$= 0.35 + 0.16 + 0.14 = 0.65$

$F(5) = P(X \leq 5) = f(5) + f(4) + f(3) + f(2)$

$= 0.15 + 0.65 = 0.8$

$F(6) = 1$

SAMA سما

إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X، فأوجد:

(a) $P(z \geq -1.52)$

$= 1 - P(z \leq -1.52)$

$= 1 - 0.06426$

$= 0.93574$

(b) $P(1.4 \leq z \leq 2.6)$

$= P(z \leq 2.6) - P(z \leq 1.4)$

$= 0.99534 - 0.91924$

$= 0.0761$

SAMA سما

1	$F(x)=x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x)=-3x^{-4}$	✓
2	$\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4}+C$	✓
3	$\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5dx=\frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6+C$	✓
4	إذا كانت: $F(0)=400$, $F(x)=\int (3x^2-12x+15)\,dx$ ، فإن: $F(x)=x^3+6x^2+15x+400$	✗
5	$(F'(x)=\sec x\ \tan x\ ,\ F(0)=4)\Longrightarrow F(x)=\sec x+3$	✓
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}=2\sqrt{3x-2}+C$	✗
7	$\left(F'(x)=\sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1\right)\Longrightarrow F(x)=\tan x+2$	✗
8	إذا كانت: $f(x)=e^{x^2}$ فإن: $f'(x)=2xe^{2x}$	✗
9	$\int \frac{1}{3x+1}dx=\ln(3x+1)+C$	✗
10	إذا كانت: $y=4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx}=4x$	✗
11	$\int x\,e^{6x}dx=\frac{1}{6}x\,e^{6x}-\frac{1}{36}e^{6x}+C$	✓
12	$\int x\sin(\pi x)dx=-\frac{x}{\pi}\cos(\pi x)+\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)+C$	✓
13	$\int x\,e^{6x}dx=\frac{1}{6}x\,e^{6x}-\frac{1}{36}e^{6x}+C$	✓
14	$\int \frac{-6dx}{x^2+3x}=-2\ln\lvert x+3\rvert+2\ln\lvert x\rvert+C$	✗
15	$\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)}=\ln\lvert x+3\rvert+\ln\lvert x+7\rvert+C$	✗

16 الدالة: $f(x)=\dfrac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x)=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{2x-3}$ ✓

17 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}$ ✓

18 $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx-\int_5^2 f(x)\,dx=0$ ✗

19 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(|x|)^3\,dx=-\frac{1}{2}$ ✗

20 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx=1$ ✗

21 مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=a$, $x=b$ هي: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ✗

22 إذا كان: $x=-1$, $y=-5$, $\dfrac{dy}{dx}=x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

- (a) $-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{14}{3}$
- (b) $3x^{\frac{1}{3}}+2$
- (c) $3x^{\frac{1}{3}}-2$ ●
- (d) $3x^{\frac{1}{3}}$

23 $\displaystyle\int\left(\frac{x^2-4x+4}{x-2}+2\right)^2 dx=$

- (a) x^2+C
- (b) $2x+C$
- (c) $\dfrac{x^2}{2}+2x+C$
- (d) $\dfrac{1}{3}x^3+C$ ●

24 $\displaystyle\int x(x^2+2)^7\,dx=$

- (a) $\dfrac{1}{16}(x^2+2)^8+C$ ●
- (b) $\dfrac{1}{4}(x^2+2)^8+C$
- (c) $\dfrac{1}{12}(x^2+2)^6+C$
- (d) $\dfrac{1}{3}(x^2+2)^6+C$

25 إذا كانت: $F(x)=\displaystyle\int(x+1)(2x^2+4x-1)\,dx$ ، $F(-2)=\dfrac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

- (a) $\dfrac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+\dfrac{5}{4}$
- (b) $\dfrac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+1$ ●
- (c) $\dfrac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2+1$
- (d) $4(2x^2+4x-1)^2-1$

$\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$ a) $x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$ b) $4x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$ c) $x^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}}+C$ d) $4x^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}}+C$	26
$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$ a) $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$ b) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+C$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$ d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2\sqrt{x+1}+C$	27
إذاكانت $y_{\theta=0}=-3$ ، $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ فإنّ y تساوي: a) $-\cos\theta$ b) $2-\cos\theta$ c) $-2-\cos\theta$ d) $4-\cos\theta$	28
إذا كانت $y=x^2e^x-xe^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي: a) $e^x(x^2+x-1)$ b) $e^x(x^2-x)$ c) $2xe^x-e^x$ d) $e^x(x^2+2x+1)$	29
$\int \sqrt[3]{\cot x}\csc^2 x\,dx =$ a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$ b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$ c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3}+C$ d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$	30
$\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}dx =$ a) $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$ b) $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$ c) $-2\sqrt{2+\cot x}+C$ d) $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}}+C$	31
الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x)=8+\csc x\cot x$ هي: a) $F(x)=8x+\csc x+C$ b) $F(x)=8x-\cot x+C$ c) $F(x)=8x-\csc x+C$ d) $F(x)=8x+\cot x+C$	32

إذا كانت $y=(\ln x)^2$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي: a) $\frac{\ln x}{x}$ b) $\frac{2\ln x}{x}$ c) $\frac{x\ln x}{2}$ d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$	33
$\int x^2\ln(x)\,dx=$ a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{x^3}{3}+C$ b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C$ c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x)+\frac{x^3}{9}+C$ d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C$	34
إذا كانت $y=\ln\left(\frac{10}{x}\right)$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي: a) $-\frac{10}{x}$ b) $\frac{10}{x}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $-\frac{1}{x}$	35
$\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=$ a) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$ b) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$ c) $\frac{e^{-x}-e^x}{2}+C$ d) $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C$	36
$\int \frac{e^x}{e^x-4}dx=$ a) $-\frac{1}{2}(e^x-4)+C$ b) $\ln\lvert e^x-4\rvert+C$ c) $-\ln\lvert e^x-4\rvert+C$ d) $\frac{1}{2}\ln\lvert e^x-4\rvert+C$	37
إذا كان $\int(3x-1)e^{3x+2}\,dx=uv-\int v\,du$ فإنّ: $\int v\,du=$ a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2}+C$ b) $-e^{3x+2}+C$ c) $\frac{1}{3}e^{3x+2}+C$ d) $e^{3x+2}+C$	38

إذا كان $\int (2x+1)\ln x\, dx = uv - \int v du$ فإن: $uv =$ ⓐ $(2x+1)\ln x$ ⓑ $2x\ln x$ ⓒ $\frac{2x+1}{2}\ln x$ ⓓ $x(x+1)\ln x$	39
الدالة النسبية: $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي: ⓐ $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$ ⓑ $\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}$ ⓒ $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ ⓓ $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}$	40
$\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$ ⓐ $4\ln\|x-2\|-2\ln\|x+2\|+C$ ⓑ $3x+2\ln\|x-2\|-2\ln\|x-2\|+C$ ⓒ $3x+4\ln\|x-2\|-2\ln\|x+2\|+C$ ⓓ $3x+4\ln\|x-2\|+2\ln\|x+2\|+C$	41
إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)dx = 2$, $\int_{-1}^3 f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^3 (2f(x)+3g(x)+1)dx$ تساوي: ⓐ 18 ⓑ -6 ⓒ 6 ⓓ 12	42
لتكن: $f(x)=x^2+5$ فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى: ⓐ $\mathbb{R}-\mathbb{R}^-$ ⓑ $\mathbb{R}-\mathbb{R}^+$ ⓒ $\mathbb{R}^-$ ⓓ $\mathbb{R}^+$	43
$\int_{-1}^1 (1-\|x\|)dx =$ ⓐ 1 ⓑ -1 ⓒ 0 ⓓ $\frac{1}{2}$	44
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)dx =$ ⓐ 4 ⓑ 2 ⓒ 0 ⓓ π	45
مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=b$, $x=a$ هي: $\int_a^b f(x)dx$	46

إذا كانت: $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \le 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$	47
مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=4-x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$	48
حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V=\pi\int_0^4 4x\,dx-\pi\int_0^1 4x\,dx$	49
طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,1]$ هو $L=\frac{2}{3}$ وحدة طول.	50
منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $-\sqrt{x}+x$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلته: $f(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x^2+\frac{2}{3}$	51
المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y'''+(y')^2+y=0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى.	52
إذا كان $y=1$ عند $x=0$ و $y'+y=2$ فإن $y=2e^{-x}$	53
إذا كان $y=\frac{1}{2}$ عند $x=0$ و $y'+2y=0$ فإن $y=\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{4}$	54
المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y''+x)^2}{xy}=3$ من: a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية. b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى. c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية. d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.	55
حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=2x$ الذي يحقق $y=-2$ عندما $x=1$ هو: a) $y=x^2+3$ b) $y=x^2-3$ c) $y=\frac{x^2}{2}-3$ d) $y=\frac{x^2}{2}+3$	56
إذا كان $y''=2x^2+3x$ فإنّ: a) $y=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+c$ b) $y=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$ c) $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^3+c_1x+c_2$ d) $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^3+c_1x$	57

58

حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=1$ الذي يحقق $y=3$ عند $x=5$ هو:

a) $y=2e^{\frac{5}{2}}$

b) $y=\dfrac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

c) $y=2e^{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)}+1$

d) $y=2e^{\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)}+1$

59

مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ومحور السينات هي:

a) 9π units^2

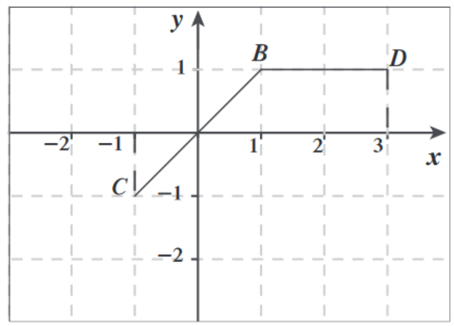
b) 6π units^2

c) 3π units^2

d) $\frac{9}{2}\pi$ units^2

60

إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB}\cup\overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=3$, $x=-1$ هي:



a) 3 units^2

b) 4 units^2

c) 2 units^2

d) 5 units^2

61

حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

a) 6π

b) 18

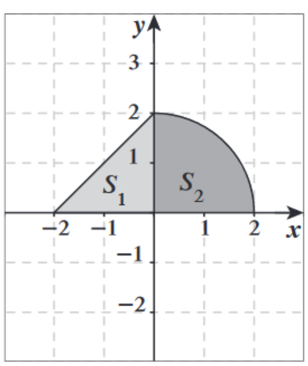
c) 18π

d) 81π

62

المنطقة المظللة $S=S_1\cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.

حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:



a) $\frac{40}{3}\pi$

b) $4+2\pi$

c) $\frac{16}{3}\pi$

d) 8π

63

حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y=-\sqrt{4-x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

a) 4π

b) 6π

c) $\frac{16}{3}\pi$

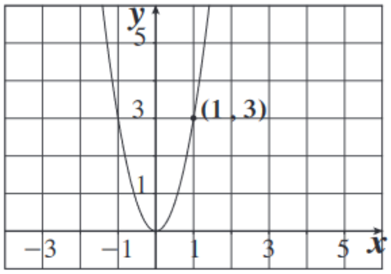
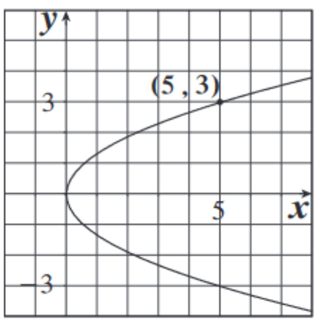
d) $\frac{32}{3}\pi$

Page 55

64	طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو: a) 7 units b) 6 units c) 5 units d) 1 unit
65	معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي: a) $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ b) $\ln\|3-x\|+3$ c) $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ d) $3-\ln\|3-x\|$
66	طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x)=x-3$ في الفترة $[0,2]$ هو: a) $\sqrt{2}$ units b) $2\sqrt{2}$ units c) $3\sqrt{2}$ units d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units
67	معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي: a) $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ b) $x^2-2\sqrt{x^3}$ c) $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ d) $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

القطوع المخروطية

68	$y^2=\frac{1}{2}x$ هي معادلة قطع مكافئ، بؤرته $\left(0,\frac{-3}{2}\right)$ ✗
69	معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ودليله $x=-2$ هي: $x^2=8y$ ✗
70	في القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ ، طول المحور الأصغر يساوي 8 ✓
71	طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ يساوي 10 units ✓
72	النقطة $(\sqrt{33},0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ ✓
73	الخطّان المقاربان للقطع الزائد الذي معادلته $x^2-y^2=12$ هما متعامدان. ✓
74	$x^2-y^2=4$ هي معادلة قطع زائد. ✓
75	نقطتا طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{25}-y^2=1$ هما: $B_1(1,0)$, $B_2(-1,0)$. ✗
76	معادلتا المقاربين للقطع الزائد $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ هما: $y=\frac{-1}{2}x$ ، $y=\frac{1}{2}x$ ✓
77	إذا كانت $e<1$ ، فإن القطع هو قطع ناقص. ✓
78	المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{y^2}{15}-\frac{x^2}{10}=1$ ينطبق على محور الصادات. ✓

79	المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2), B(-5,2)$ هي: (a) $y^2=-\frac{4}{5}x$ (b) $x^2=-\frac{4}{5}y$ (c) $y^2=\frac{4}{5}x$ (d) $x^2=\frac{4}{5}y$
80	بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:  (a) $\left(0,\frac{-4}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{9}{20},0\right)$ (c) $\left(0,\frac{1}{12}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{12},0\right)$
81	النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2=4py$ هي: (a) $(1,1)$ (b) $(1,0)$ (c) $(0,1)$ (d) $(0,0)$
82	معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:  (a) $x^2=-\frac{25}{3}y$ (b) $y^2=\frac{9}{5}x$ (c) $x^2=\frac{25}{3}y$ (d) $y^2=\frac{5}{9}x$
83	النقطة $A(-10,0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. مجموع المسافتين AF_1+AF_2 حيث F_1 ، F_2 هما البؤرتان يساوي: (a) 10 units (b) 12 units (c) 14 units (d) 20 units
84	طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ يساوي: (a) 12 units (b) $2\sqrt{41}$ units (c) 16 units (d) 20 units
85	معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7,0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0,\pm 6)$ هي: (a) $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{36}=1$ (b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{85}=1$ (c) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ (d) $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49}=1$

86	لأيّ قطع ناقص يكون: a) $a > c$ b) $a < c$ c) $a = ec$ d) $a = c$
87	الاختلاف المركزي للمعادلة $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هو: a) $\frac{\sqrt{11}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{11}}{5}$ c) $\frac{36}{25}$ d) $\frac{25}{36}$
88	إذا كانت معادلة أحد المقاربين $y = \frac{-7}{5}x$ والاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{74}}{5}$ فمعادلة القطع الزائد هي: a) $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{5} = 1$ b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 1$ c) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$
89	دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. ✓
90	التباين هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع. ✗
91	لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون: $P(X < a) = 1 - F(a)$ ✗
92	قيمة K التي تجعل التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي 1 لدالة التوزيع الاحتمالي f هي صفر. ✗ x: 2 ، 1 ، 0 $f(x)$: $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، K
93	عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن $n(S) = 6$. ✗
94	عدد أحرف كلمات كتاب هو متغير عشوائي متصل. ✗
95	من خواص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول $x = \mu$. ✓

Page 58

96	إذا كانت الدالة f معرفة كالتالي: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & : \quad 0\le x\le 1\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$ فإن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.
97	إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي: x: 1, 2, 3 ؛ $f(x)$: K, $2K$, $2K$ فإن قيمة K تساوي: (a) 0.5 (b) 0.2 (c) 1 (d) 0.4
98	إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا لدالة التوزيع الاحتمالي f وكان التوقع = 0.5 ، $\sum x^2 f(x) = 4.25$، فإن الانحراف المعياري هو: (a) 4 (b) 2 (c) 3.75 (d) 1
99	إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا دالة توزيع الاحتمالي f هي: x: 0, 1, 2 ؛ $f(x)$: 0.25, 0.50, 0.25 فإن التوقع له يساوي: (a) 1 (b) 1.25 (c) 1.5 (d) 0.5
100	إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي: x: 0, 1, 2 ؛ $f(x)$: $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{9}$ فإن التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي: (a) 1 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{7}{9}$ (d) 0
101	إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا يأخذ القيم -1 , 1 , 1.5 وكان: $P(X=-1)=0.6$, $P(X=1)=0.3$ فإن $P(X>0)$ يساوي: (a) 0.6 (b) 0.9 (c) 0.4 (d) 0.7

102	إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$ فإن $P(X = 1)$ يساوي: (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 1 (d) ليس أيًّا مما سبق
103	إذا كان Z يتبع التوزيع الطبيعي فإن : $P(0 \le Z \le 2.35)$ يساوي : (a) 0.9906 (b) 0.5 (c) 0.4906 (d) 0.218

القوانين

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة التوزيع الاحتمالي f فان التوقع و التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التوقع : $\mu = \sum(x_i f(x_i))$

التباين : $\sigma^2 = \sum\left((x_i)^2 f(x_i)\right) - \mu^2$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X

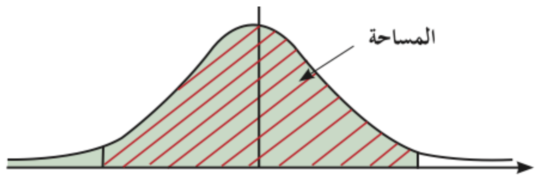
$$(1) \quad P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$$
$$(2) \quad P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a, b]$ هي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & : \ a \le x \le b \\ 0 & : \ \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

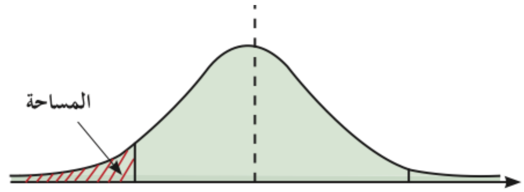
التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\mu = \frac{a+b}{2}$

التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414