قوانين
الفصل الدراسي الأول

الرياضيات

أ/وليد حسين

الصف

10

الوحدة الأولى: الجبر - الأعداد والعمليات عليها

الفترات

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ب]	مغلقة	أ ≤ س ≤ ب	أ ب
(أ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب	أ ب
[أ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ ≤ س < ب	أ ب
(أ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ≤ ب	أ ب

الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.

المتباينات

عندما تضرب طرفي متباينة في عدد سالب أو تقسم طرفي متباينة على عدد سالب، اعكس علاقة الترتيب.

تعريف:

لكل عدد حقيقي س يكون:

|س| = س إذا كان س > ٠
 ٠ إذا كان س = ٠
 −س إذا كان س < ٠

كيف تحل معادلة المطلق

نتيجة

١ إذا كان أ عددًا حقيقيًا موجبًا فإن حل المعادلة |س| = أ هو: س = أ أو س = −أ وتكون مجموعة الحل {−أ، أ}.

٢ إذا كان أ عددًا حقيقيًا سالبًا فإن المعادلة |س| = أ مجموعة حلها ∅

٣ إذا كان أ = ٠ فإن |س| = أ مجموعة حلها {٠}.

حل المتباينات التي تحتوي المطلق

ليكن أ عددًا حقيقيًا موجبًا.

١ |س| ≤ أ تكافئ −أ ≤ س ≤ أ

٢ |س| ≥ أ تكافئ س ≥ أ أو س ≤ −أ

لرسم دالة المطلق :

حالة أولى : وتستخدم عنرماأ لا يساوي الواحد

رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| + جـ هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ} ، جـ\right)$

حالة ٢ : دالة المرجع

دالة المرجع هي دالة نستخدم بيانها للحصول على بيان دوال أخرى بإجراء بعض التحويلات الهندسية.

ص = |س|، ص = − |س|،

التمثيل البياني للدالة ص = |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = |س| إلى الأعلى (أو إلى الأسفل) ك وحدة.

تعرفت كيفية استخدام الانسحاب الأفقي أو الرأسي لدوال المرجع للحصول على رسم بياني لبعض دوال القيمة المطلقة. يمكن أيضًا استخدام الانسحابين الأفقي والرأسي معًا للحصول على بعض الرسوم البيانيّة للدوال: ص = |س + ل| + ك

الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| (حيث ل عدد حقيقي موجب) هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = |س| ، ل وحدة إلى جهة اليمين.

أ) ص = |س − ٢| + ١

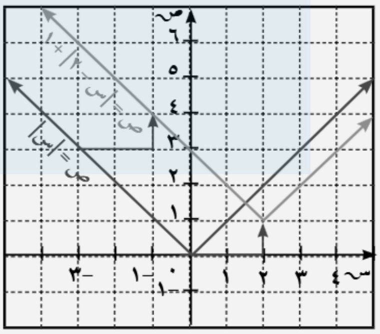
الحل:

دالة المرجع ص = |س|، ل = ٢، ك = ١

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى جهة اليمين.

(+١) تعني الانسحاب وحدة واحدة إلى الأعلى.

ضع الرأس (٢، ١) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



ب) ص = −|س + ٣| − ٢

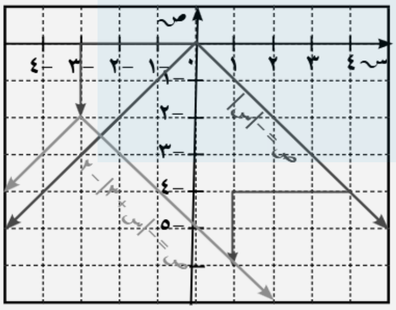
الحل:

دالة المرجع هي ص = −|س|، ل = ٣، ك = ٢

(+٣) تعني الانسحاب ٣ وحدات إلى جهة اليسار.

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى أسفل.

ضع الرأس (−٣، −٢) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



حل نظام معادلتين خطيتين

بطريقة الحذف.

$$\begin{cases} ٢س + ٣ص = ١١ \\ −٢س + ٤ص = ١٠ \end{cases}$$

بطريقة التعويض.

$$\begin{cases} ص = ٣س + ١ \\ ص = س − ٥ \end{cases}$$

حل نظام معادلة تربيعية بمتغير واحد

من القانون العام لحل المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠

تكون الصورة العامة لجذري المعادلة كالتالي:

س = $\dfrac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ أو س = $\dfrac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

يسمى Δ = ب^{٢} − ٤أجـ **المميز**، وقد يكون الناتج عددًا موجبًا أو صفرًا أو عددًا سالبًا لأنه يميّز لنا **نوع جذري** المعادلة من حيث كونهما: **عددين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجبًا**

أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا

أو عددين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.

المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠ وليكن جذراها م ، ن

مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

إذا كان جذرا المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما م، ن

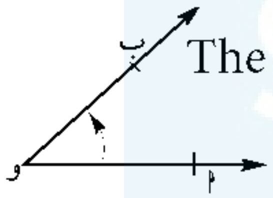
فإن: م + ن = $-\dfrac{ب}{أ}$ ، م × ن = $\dfrac{جـ}{أ}$

إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

س^{٢} − (م + ن) س + م ن = ٠

الوحدة الثانية: وحدة حساب المثلثات

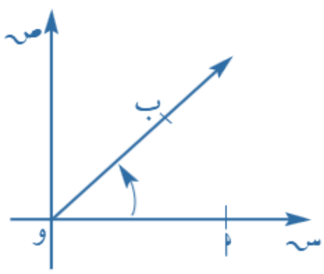
الزاوية الموجهة الموجبة: The Positive Oriented Angle



إذا كان الضلع الابتدائي هو $\overleftarrow{وأ}$ والضلع النهائي لها هو $\overleftarrow{وب}$ كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون موجبًا.

الزاوية الموجهة السالبة: The Negative Oriented Angle

إذا كان الضلع الابتدائي هو $\overleftarrow{وأ}$ والضلع النهائي هو $\overleftarrow{وب}$ كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون سالبًا.



Page 3

أنظمة قياس الزاوية:

توجد أنظمة مختلفة لقياس الزاوية، أهمها القياس الستيني والقياس الدائري.

أولا: القياس الستيني: The Degree Measure

في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى ٣٦٠ قسمًا متساويًا، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا في هذا القياس ويرمز إليها بالرمز (°).

قياس الزاوية القائمة يساوي ٩٠°. وقياس الزاوية المستقيمة يساوي ١٨٠°.

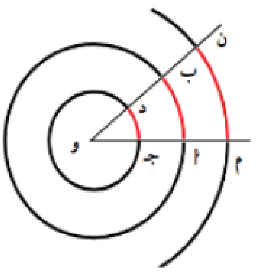
فمثلًا سنكتب الزاوية التي قياسها ٧٥ درجة و٤٥ دقيقة و١٥ ثانية على الصورة التالية:

٧٥° ٤٥′ ١٥″.

ملاحظة:
الدرجة = ٦٠ دقيقة
١° = ٦٠′
الدقيقة = ٦٠ ثانية
١′ = ٦٠″

ثانيا: القياس الدائري (الراديان): The Radian Measure

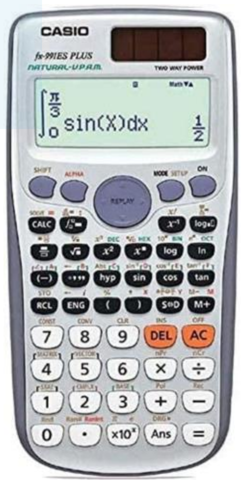
الزاوية المركزية زاوية رأسها مركز الدائرة.

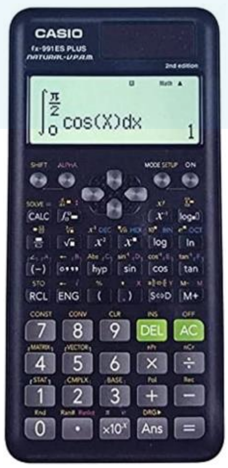


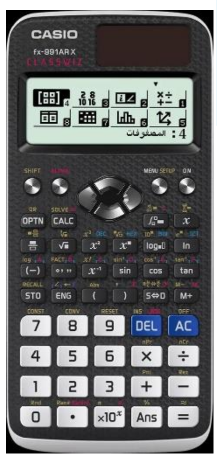
$$هـ^د = \frac{ل}{نق} \quad ومنها \quad ل = هـ^د \, نق$$

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ^د وقياسها الستيني س° فإن:

$$\frac{هـ^د}{\pi} = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} \qquad ومنها \quad س^\circ = هـ^د \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \qquad هـ^د = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$$



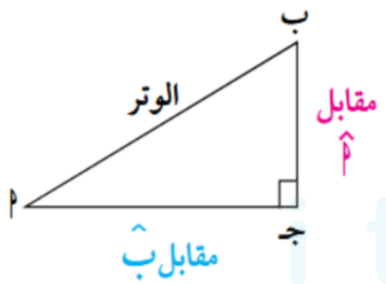




قتاأ = $\frac{١}{\text{جاأ}}$: جاأ ≠ ٠

Sine جاأ = $\frac{\text{مقابل أ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$

قتاأ = $\frac{١}{\text{جاأ}}$ ⟸ قتاأ × جاأ = ١



قاأ = $\frac{١}{\text{جتاأ}}$: جتاأ ≠ ٠

Cosine جتاأ = $\frac{\text{مجاور أ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ج}}{\text{أ ب}}$

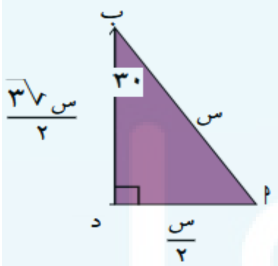
قاأ = $\frac{١}{\text{جتاأ}}$ ⟸ قاأ × جتاأ = ١

ظتاأ = $\frac{١}{\text{ظاأ}}$: ظاأ ≠ ٠

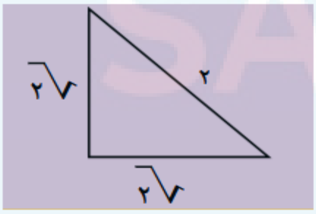
Tangent ظتاأ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$

ظاأ × ظتاأ = ١

. أ ب د مثلث ثلاثيني ستيني (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).



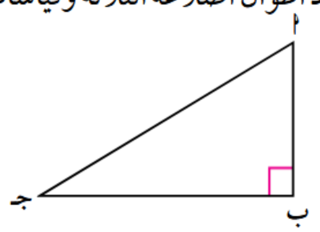
إذا كان طول كل من ضلعي الزاوية القائمة يساوي س، فإن طول الوتر = س √٢



حل المثلث قائم الزاوية

نعلم أن للمثلث ستة عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حلّ المثلث يعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث. سيقتصر عملنا في هذا البند على المثلث قائم الزاوية.

في الشكل المقابل المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب.



الأضلاع: $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$

الزوايا: أ̂ ، ب̂ ، ج̂

غالبًا ما تعطى ثلاثة عناصر في المثلث أحدها على الأقل طول أحد الأضلاع ويتعين علينا إيجاد الباقي.

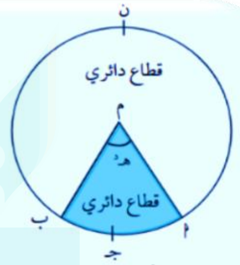
١- حالة ضلعين معلومين مع الزاوية القائمة

٢- حالة ضلع معلوم وزاويتين علم قياسهما

– زاوية الارتفاع: إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي.

– زاوية الانخفاض: إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي.

النسبة والتناسب



مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نق

ل = هـ^{د} × نق

إذا عوّضنا عن ل بـ هـ^{د} × نق نحصل على:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق × نق

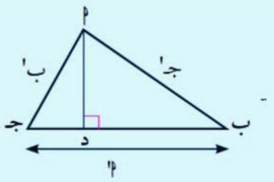
= $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢}

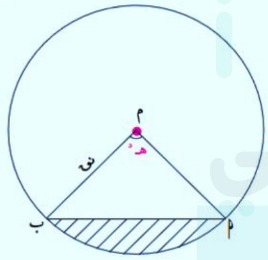
القطاع الدائري والقطعة الدائرية

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ جـ × جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ جـ × جا أ





مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ^{د} − جا هـ^{د})

النسبة والتناسب

خاصيّة الضرب التقاطعي:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ د = ب جـ

$\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د}$

تعريف:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د **أعداد متناسبة**.

وإذا كانت أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى أ، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب**.

خواص التناسب
إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$. فإن: ١ أ د = ب جـ
٢ $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{جـ}$
٣ $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$
٤ $\frac{أ+ب}{ب} = \frac{جـ+د}{د}$
٥ $\frac{أ+جـ}{ب+د} = \frac{أ}{ب}$

التناسب المتسلسل الهندسي

ليكن أ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ فإنّه يقال إن أ، ب، جـ في **تناسب متسلسل** (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

ويسمى ب **الوسط المتناسب** للعددين أ، جـ أو **الوسط الهندسي** لهما كما يسمى أ، جـ **طرفي التناسب**.

إذا كان أ، ب، جـ ∈ ح* في تناسب متسلسل فإن جـ، ب، أ في تناسب متسلسل أيضًا.

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ (أي أن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل)

فإن $\text{ب}^2 = \text{أ}\text{جـ}$ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

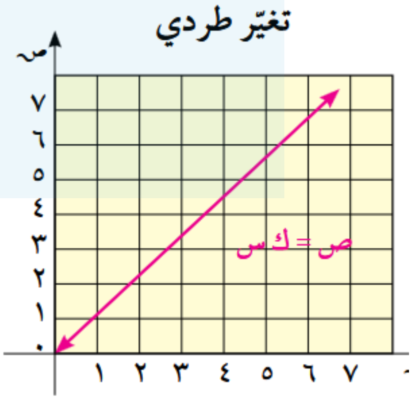
$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ (أي أن أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل) حيث م عدد ثابت

فإن: $\text{جـ} = \text{د} \times \text{م}$ ، $\text{ب} = \text{د} \times \text{م}^2$ ، $\text{أ} = \text{د} \times \text{م}^3$

مقارنة
التغير الطردي والتغير العكسي

يوضح الشكلان البيانيان التاليان الفرق بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي.

تغيّر طردي



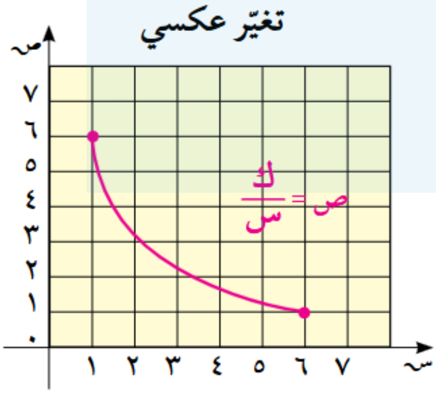
ص α س

ص = ك س ك > ٠

$\text{ك} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

= ثابت التغيّر

تغيّر عكسي



ص α $\frac{1}{\text{س}}$

$\text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}}$: ك > ٠

ك = س ص

= ثابت التغيّر

ملاحظات

١ يمكن تمثيل دالة التغير الطردي: ص = ك س بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ يمكن كتابة المعادلة الخطيّة ص = ك س بالصورة: ك = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠

٣ ثابت التغيّر ك = معدل التغيّر في البيانات التي تصف التغيّر.

٤ الثابت ك = ميل الخط المستقيم الذي يمثّل المعادلة بيانيًا.

٥ في حالة التغيّر الطردي فإنّ: ثابت التغيّر = معدل التغيّر = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيّر.

٦ التغير قد يكون بالزيادة أو بالنقصان.

٧ إذا كانت ص α س فمعنى ذلك أن $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$: المقام ≠ صفر

الوحدة الرابعة: الهندسة المستوية

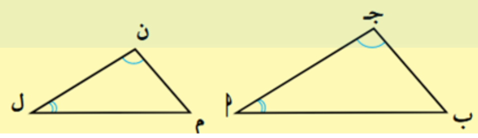
النسبة الذهبية

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: ١ أي حوالى ١,٦١٨ : ١.

تشابه المثلثات

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

Δأب جـ ~ Δل م ن.



نظرية (٢)

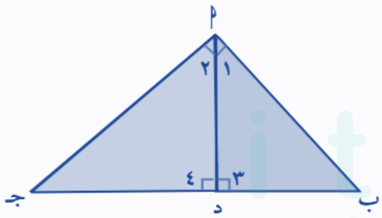
يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

نظرية (٣)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

نظرية (١)

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.



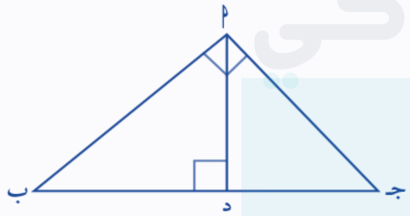
المعطيات: أب جـ مثلث قائم الزاوية أ، أد ⊥ ب جـ.

المطلوب: ١ إثبات تشابه المثلثين أب د، جـ د أ.

٢ إثبات تشابه المثلثين أب د، جـ ب أ.

٣ إثبات تشابه المثلثين أ جـ د، ب جـ أ.

نتيجة (٢)



إذا كان △أب جـ قائم الزاوية أ، أد ⊥ جـ ب:

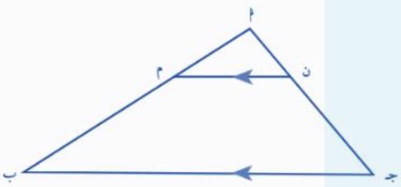
١ (أب)^2 = ب د × ب جـ

٢ (أجـ)^2 = جـ د × جـ ب

٣ أب × أجـ = أد × ب جـ

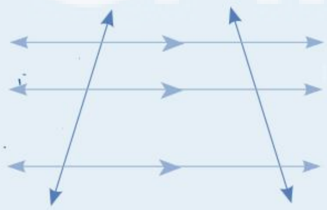
نظرية (١) نظرية المستقيم الموازي

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.



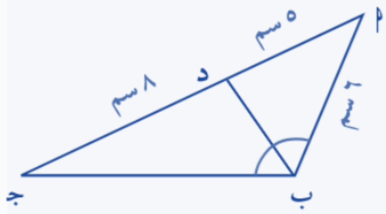
نظرية (٢) نظرية طاليس

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



نظرية (٣) نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.



$\frac{\text{جـ د}}{\text{د أ}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ب أ}}$. نظرية منصف الزاوية

تعريف:

المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها مرتبة على الصورة {١، ٢، ٣، ٤، ...، م} ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

المتتالية الحسابية

تعريف:

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز د. وعلى ذلك $ح_{ن+١} - ح_{ن} = د$ أو $ح_{ن+١} = ح_{ن} + د$.

الحد النوني للمتتالية الحسابية

$ح_{٢} = ح_{١} + د$

$ح_{٣} = ح_{١} + ٢د$

$ح_{٤} = ح_{١} + ٣د$

$ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١)د$ لكل $ن \in ص_{+}$.

إذا كان الحد المعروف $ح_{ك}$، فإن $ح_{ك} = ح_{١} + (ك - ١)د$: $ك \in ص_{+}$

ومنه يكون $ح_{ن} - ح_{ك} = (ن - ك)د$

أي أن $ح_{ن} = ح_{ك} + (ن - ك)د$

وتكون الصورة العامة للمتتالية الحسابية:

$(ح_{١}، ح_{١} + د، ح_{١} + ٢د، ...، ح_{١} + (ن - ١)د، ...)$

لاحظ أن $د = \frac{ح_{ن} - ح_{ك}}{ن - ك}$: $ن \neq ك$

الأوساط الحسابية

$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$

مجموع ن حدا الأولى من حدود متتالية حسابية

$\boxed{جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(ح_{١} + ح_{ن})}$

أو

$\boxed{جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢ح_{١} + (ن - ١)د]}$

المتتالية الهندسية

تعريف:

المتتاليّة الهندسيّة: هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة، يساوي عددًا حقيقيًّا ثابتًا غير صفري،

فيكون $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = ر$ حيث $ح_{ن} \neq ٠$.

لكل $ن \in ص_{+}$، ر عدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية common ratio

الحد النوني للمتتالية الهندسية

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية أساسها $ر \neq ٠$ فإن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

حيث $ح_١$ هو الحد الأول، $ح_ن$ هو الحد النوني، $ر$ هو أساس المتتالية الهندسية.

ويكون $ح_٢ = ح_١ \times ر$ ، $ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$ ، $ح_٤ = ح_١ \times ر^٣$ ، …

وتكون الصورة العامة للمتتالية الهندسية $ح_١$، $ح_١ ر$، $ح_١ ر^٢$، $ح_١ ر^٣$، … ، $ح_١ ر^{ن-١}$ ، …

ومنه يكون $\frac{ح_ن}{ح_ك} = \frac{ح_١ \times ر^{ن-١}}{ح_١ \times ر^{ك-١}} = ر^{ن-ك}$　　أي أن $ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$

الأوساط الهندسية بين عددين

إذا كوّنت أ، ب، جـ متتالية هندسية حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية وحيث أجـ > ٠

فإن: $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ ومنه $ب^٢ = أجـ$　　$\therefore$ $ب = \pm\sqrt{أجـ}$.

مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية

قانون

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية، $جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + … + ح_ن$ هو مجموع ن حدًّا الأولى، فإن:

١ $جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_ن = ح_١ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

٢ إذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_ن = ن ح_١$