قوانين
الفصل الدراسي الأول

الرياضيات

أ/وليد حسين

الصف
11
العلمي

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

الجذور التربيعية

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$\sqrt{x^2}=|x|=x$$

$$(\sqrt{x})^2=x$$

$$\sqrt{x \cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ ,\ y\neq 0$$

الجذور التكعيبية

$$(\sqrt[3]{x})^3=\sqrt[3]{x^3}=x\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{x^3}=x$$

$$(\sqrt[3]{x})^3=x$$

$$\sqrt[3]{x \cdot y}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}\ ,\ y\neq 0$$

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًّا}\\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًّا}\end{cases}$$

جمع وطرح التعبيرات الجذرية :

لجمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب أن تكون متشابهة

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه لذلك

لجمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب وضعها في أبسط صورة ليتسنى لنا معرف فيما إذا كانت متشابهة أم لا .

تبسيط الجذور

حتى يكون التعبير الجذري في **أبسط صورة** يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر.
  فمثلاً $\sqrt{8a^6b^7}$ ليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المقام جذرًا. مثل: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المجذور كسرًا. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ ليس في أبسط صورة.
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن.
  مثل: $\sqrt[10]{32}$ ليس في أبسط صورة.

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذر: إذا كان x, y تعبيرين جذريين يمثلان أعداد غير نسبية وكان ناتج ضربهما عدد نسبي فإن x, y مترافقان.لذلك لتبسيط كسر مقامه يتضمن جذر لابد من ضرب المقام بمرافقه لإزالة الجذر من المقام إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين فإن :

- مرافق $\sqrt{a}$ هو $\sqrt{a}$
- مرافق $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ هو $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
- مرافق $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ هو $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$
- مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$
- مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$
- مرافق $\sqrt[3]{a^2}$ هو $\sqrt[3]{a}$

تذكرة بقوانين الأسس: $(a, b \neq 0)$, $\forall a, b \in R$, $\forall m, n \in Z$

1. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , a \neq 0$
2. $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m} \quad , b \neq 0$	5. $(a^m)^n = a^{m.n}$
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , a \neq 0$

المعادلات الجذرية : هي معادلة أس المتغير فيها عدد نسبي (ليس عدد صحيح) أو يتضمن المجذور متغير .

سوف تختصر دراستنا على المعادلات التي تحتوي جذر بداخله حدودية درجة أولى أي المعادلات التي تحوي $\sqrt{ax+b}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ لذلك سوف نميز الحالات التالية :

أولا : المعادلة ذات الشكل : $\sqrt{ax+b} =$ عدد موجب

خطوات الحل : نوجد شرط الحل (ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر) ثم نربع طرفي المعادلة فنحصل على معادلة درجة أولى نحلها ثم إذا كان الحل يحقق شرط الحل نقبله وإذا لم يحقق شرط الحل لا نقبله .

ثانيا : المعادلة ذات الشكل: $\sqrt{ax+b} =$ عدد سالب

تكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية ϕ لأن $\sqrt{ax+b}$ موجب لا يمكن أن يساوي عدد سالب .

ثالثا : المعادلة ذات الشكل: $(ax+b)^{\frac{m}{n}} = c \quad , \quad n, m \in \mathbb{Z}^{+} - \{0\}$

خطوات الحل : في البداية ننتبه أن n هي دليل الجذر فإذا كانت n عدد زوجي فهناك شرط للحل هو $ax+b \geq 0$ واذا كانت n عدد فردي لا يوجد شرط للحل

نرفع طرفي المعادلة للأس $\frac{n}{m}$ كما يلي :

$$[(ax+b)^{\frac{m}{n}}]^{\frac{n}{m}} = (c)^{\frac{n}{m}}$$

هنا نميز حالتين :

إذا كانت m عدد زوجي

$$|ax+b| = (c)^{\frac{m}{n}}$$

إذا كانت m عدد فردي

$$ax+b = (c)^{\frac{m}{n}}$$

فتصبح معادية درجة أولى نحلها .

رابعا : المعادلة ذات الشكل: $\sqrt{ax+b} = cx+d$

خطوات الحل : يجب أولا ان يكون الجذر في أحد الطرفين

نوجد شرط الحل (ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر و الطرف الثاني أكبر أو يساوي الصفر ، نقاطع المجموعتين فنحصل على قيم x المقبولة) ثم نربع طرفي المعادلة فنحصل على معادلة درجة ثانية نحلها ثم إذا كان الحل يحقق شرط الحل نقبله وإذا لم يحقق شرط الحل لا نقبله .

خامسا : المعادلة ذات الشكل: $\sqrt{ax+b} = \sqrt{cx+d}$

خطوات الحل : نوجد شرط الحل (ما تحت الجذر الأول أكبر أو يساوي الصفر و ما تحت الجذر الثاني أكبر أو يساوي الصفر ، نقاطع المجموعتين فنحصل على قيم x المقبولة) ثم نربع طرفي المعادلة فنحصل على معادلة درجة أولى نحلها ثم إذا كان الحل يحقق شرط الحل نقبله وإذا لم يحقق شرط الحل لا نقبله .

سادسا : المعادلة ذات الشكل: $\sqrt{ax+b} = -\sqrt{cx+d}$

السالب لا يساوي الموجب إلا إذا كان كليهما صفر

خطوات الحل : نشكل المعادلتين

الأولى ما تحت الجذر الأول يساوي الصفر و الثانية ما تحت الجذر الثاني يساوي الصفر ، نحل المعادلتين إذا وجد حل مشترك للمعادلتين يكون هو حل المعادلة الأساسية وإذا لم يوجد حل مشترك للمعادلتين يكون حل المعادلة الأساسية هو المجموعة الخالية ϕ

المعادلات الأسية

تعريف : هي كل معادلة لها الشكل $a \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$, $a^x = b$

أي معادلة يحتوي أسها متغير . طريقة الحل نحاول أن نكتب الطرف الأيمن على شكل $b = a^c$ وذلك من خلال تطبيق قوانين الأسس

فتصبح المعادلة كما يلي : $a^x = a^c$ ونستفيد من الخاصية :

إذا كان $a^x = a^c$ فإن $x = c$ فتصبح معادلة يمكن إيجاد المتغير وحلها .

الوحدة الثانية: الدوال الحقيقية

قواعد لإيجاد مجال الدالة :

من الدروس المهمة لأساسيات الرياضيات

1) مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
2) مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام .
3) مجال الدالة $f(x) = \lvert x \rvert$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
4) مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$ بشرط عدم وجود مقام داخل الجذر
5) مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي ، هو مجال الدالة $g(x)$
6) مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين أي أن : مجال f = مجال g $\cap$ مجال h 7) مجال الدالة $f(x) = g(x) . h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين أي أن : مجال f = مجال g $\cap$ مجال h
8) مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين ماعدا أصفار المقام أي أن مجال f = (مجال g $\cap$ مجال h) / مجموعة أصفار المقام

تعريف الدالة الخطية : الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الصورة العامة للدالة الخطية هي :

$$f(x) = a\,x + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad a \neq 0$$

تعريف الدالة التربيعية : الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الصورة العامة للدالة التربيعية هي :

$$f(x) = a x^2 + b x + c \quad , \; a, b, c \in \mathbb{R} \quad , \; a \neq 0$$

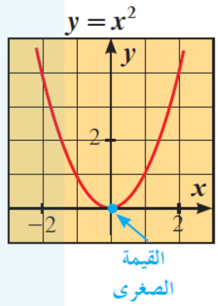
تمثل الدالة التربيعية بيانيا بمنحنى متماثل حول المحور الرأسي الذي يمر برأس المنحنى

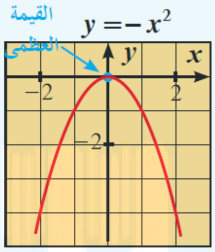
ويسمى شكل المنحني قطعاً مكافئاً والاحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $x = \frac{-b}{2a}$ وهي معادلة

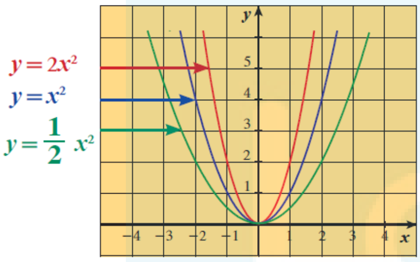
المستقيم الرأسي و يسمى محور التماثل وعندها تكون للدالة قيمة عظمى

(إشارة a سالبة) أو صغرى(إشارة a موجبة)

معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0, 0)$ هي: $y = ax^2$ ويتغير اتساع القطع المكافئ تبعًا لتغير معامل حد الدرجة الثانية.







معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k) : المعادلة على الصورة :

$$y = a(x-h)^2 + k \quad , \; a \neq 0 \; , \; h, k \in \mathbb{R}$$

هي معادلة قطع مكافئ رأسه النقطة (h, k) والمستقيم $x = h$ محور التماثل

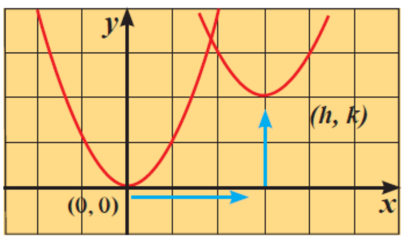
إذا كانت $a > 0$ تكون فتحة القطع للأعلى .

إذا كانت $a < 0$ تكون فتحة القطع للأسفل .

ملاحظة : نلاحظ أنه كلما زاد قيمة معامل حد الدرجة الثانية قل اتساع القطع المكافئ

* إذا كان $|a| < 1$ ، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة : $y = x^2$

* إذا كان $|a| > 1$ ، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة : $y = x^2$



المعكوس قد يكون دالة أو لا يكون دالة

1) نلاحظ عناصر مدى الدالة $f(x)$ هي مجال الدالة $g(x)$ والعكس عناصر مدى الدالة $g(x)$ هي مجال الدالة $f(x)$

2) الدالتان $g(x)$, $f(x)$ كلا منهما تعكس عملية الدالة الأخرى لذلك تسمى f معكوس g أو g معكوس f

استنتاج : إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي لبيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة ولكي نرسم معكوس الدالة بيانيا نعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة .

دوال الجذر التربيعي :

لرسم بيان الدالة $y = \sqrt{x+h} + k$ عن طريق دالة المرجع : نتبع الخطوات

1 . **نعين دالة المرجع .**

* إذا كانت الدالة $y = \sqrt{x+h} + k$ تكون دالة المرجع هي : $y = \sqrt{x}$
* إذا كانت الدالة $y = -\sqrt{x+h} + k$ تكون دالة المرجع هي : $y = -\sqrt{x}$

- عندما تكون h, k موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى.
- وعندما تكون h سالبة يزاح البيان إلى اليسار.
- وعندما تكون k سالبة يزاح البيان إلى الأسفل.

فمثلًا بيان الدالة: $y = \sqrt{x-(-3)} - 4$ أو $y = \sqrt{x+3} - 4$ ينتج من إزاحة بيان الدالة $y = \sqrt{x}$ ثلاث وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأسفل.

- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد فإننا نحللها إلى عوامل أولية ونستخدم الجدول.
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من حدوديات نسبية فإننا نستخدم الجدول.

الوحدة الثالثة: كثيرات الحدود

تكون دوال القوى على الشكل:

$$y = ax^n \,,\; a \neq 0 \,,\; n \in \mathbb{Z}^+$$

* تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان : $\boxed{1}\ \forall x \in D \,, -x \in D$　　$\boxed{2}\ f(-x) = f(x)$ إذا كانت الدالة زوجية يكون بيانها متناظر بالنسبة للمحور الصادي .
* تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة فردية إذا وفقط إذا كان : $\boxed{1}\ \forall x \in D \,, -x \in D$　　$\boxed{2}\ f(-x) = -f(x)$ إذا كانت الدالة فردية يكون بيانها متناظر بالنسبة لنقطة الأصل .

دالة كثيرة حدود

$$P(x) = \boxed{2}x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

المعامل الرئيسي　حد تكعيبي　حد تربيعي　حد خطي　حد ثابت

نظرية العامل المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود

أي : إذا كان 3 صفر من أصفار كثيرة الحدود فإنّ : $(x - 3)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود

والعكس صحيح أي :

إذا كان $(x - 3)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود فإنّ : 3 صفر من أصفار كثيرة الحدود

ملاحظة : المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لـ $f(x)$ إذا وفقط إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $(x - a)$ هو الصفر

نظرية الباقي : إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$

حيث a ثابت فإن باقي القسمة هو $f(a)$

نظرية الأصفار النسبية الممكنة :

يفرض أن : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_1 x + a_0 ; a_n \neq 0$

حيث $a_n , a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية

الممكنة لـ $f(x)$ هي :

$\{ \frac{a}{b}$: a عامل من عوامل الحد الثابت a_0 ، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $a_n \}$

- لحل المعادلة $f(x) = 0$ باستخدام الأصفار النسبية نتبع الخطوات :

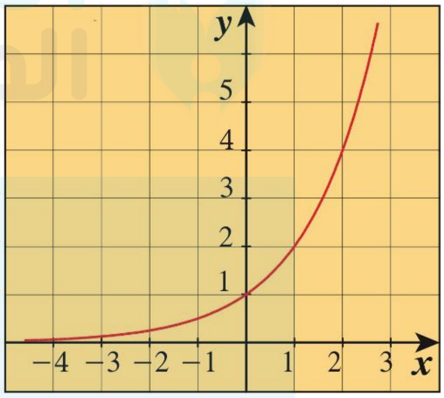
1. نوجد عوامل الحد الثابت.
2. نوجد عوامل المعامل الرئيسي.
3. نوجد الأصفار النسبية الممكنة (نقسم عوامل الحد الثابت على عوامل المعامل الرئيسي)
4. نجرب الأصفار النسبية الممكنة التي تجعل المعادلة محققة أي نوجد صفر للحدودية $f(x)$
5. من الصفر للحدودية نوجد عامل للحدودية
6. نقسم الحدودية على العامل لنوجد العامل الآخر ثم نحل معادلة العامل الآخر = 0 .

الوحدة الرابعة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

استخدام الدوال الأسية : الدالة الأسية هي الدالة التي على الصورة :

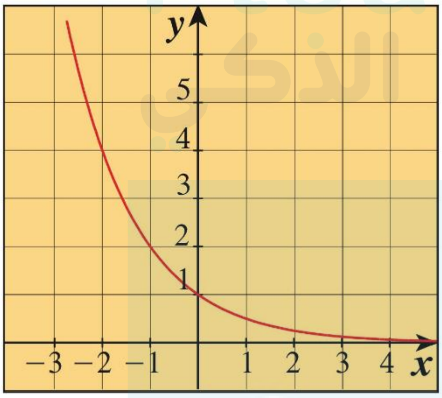
$$y = a\,b^{x}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ،\ a \in \mathbb{R}^{*}\ ،\ b \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$$

الدالة الأسية التي فيها $a > 0$ يمكن أن تستخدم كنموذج للنمو أو للتضاؤل معتمداً على قيمة b كالتالي :



عندما $b > 1$، فإن الدالة تمثل نمواً أسياً

وتكون b هي عامل النمو .



عندما $0 < b < 1$ ، فإن الدالة تمثل تضاؤلاً أسياً

وتكون b هي عامل التضاؤل .

ملاحظات :

1) بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b > 0\ ,\ b \neq 1$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^{x}$ في المحور الصادي .

2) بيان الدالة $y = -\,b^{-x}$ حيث $b > 0\ ,\ b \neq 1$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = -\,b^{x}$ في المحور الصادي .

3) بيان الدالة $y = -\,b^{x}$ حيث $b > 0\ ,\ b \neq 1$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^{x}$ في المحور السيني .

التمثيل البياني للدالة الأسية : $y = a\,(b)^{x-h} + k$ **باستخدام دالة المرجع :**

دالة المرجع هي : $y = a\,b^{x}$

نقوم بالتمثيل البياني لدالة المرجع $y = a\,b^{x}$ كما مرّ معنا سابقا ثم نقوم بعمل انسحاب أفقي مسافة h وحدة وانسحاب رأسي مسافة k وحدة للحصول على بيان الدالة

$$y = a\,(b)^{x-h} + k$$

في الصورة الأسية $y = b^x$ ، b هو الأساس ، x هو الأس ، y هو الناتج .

للحصول على قيمة الأس x بمعلومية الأساس b والناتج y نستخدم ما يعرف بالصورة اللوغاريتمية.

حيث x تساوي لوغاريتم العدد y للأساس b ويرمز للوغاريتم بالرمز (log) ويكتب على

الصورة: $x = \log_b y$

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$y = b^x$	$x = \log_b y$

العدد

الأساس

تعريف الدالة اللوغاريتمية : $\forall\, x > 0 \quad , \; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن الدالة : $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \; , f(x) = \log_b x$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b .

مجال الدالة اللوغاريتمية : هو حل المتباينة ما بعد اللوغاريتم أكبر تماما من الصفر .

ملاحظة : بيان الدالة $y = \log_b(x)$ حيث $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة

$y = b^x$ في المستقيم $y = x$

وتستخدم هذه الطريقة اذا طلب الرسم باستخدام خواص الانعكاس

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية : $y = \log_b(x - h) + k$ **باستخدام دالة المرجع :**

دالة المرجع هي : $y = \log_b x$

نقوم بالتمثيل البياني لدالة المرجع $y = \log_b x$ كما مرّ معنا سابقا ثم نقوم بعمل انسحاب أفقي مسافة h وحدة وانسحاب رأسي مسافة k وحدة للحصول على بيان الدالة

$$y = \log_b(x - h) + k$$

خواص اللوغاريتمات : $\forall m,n,b \in \mathbb{R}^+ \ , b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k \log_b m \quad , k \in \mathbb{R}$

ملاحظات : إذا كان b , m عددان حقيقيان موجبان ، $b \neq 1$ فإنّ :

③ $\log_b b^m = m$ ② $\log_b b = 1$ ① $\log_b 1 = 0$

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتم : لحل المعادلة الأسية ذات الشكل : $b^{kx} = a$ باستخدام اللوغاريتم نتبع الخطوات :

1. نأخذ لوغاريتم الطرفين $\log b^{kx} = \log a$
2. نستخدم خواص اللوغاريتمات $kx \log b = \log a$
3. نقسم الطرفين على $k \log b$ $\frac{kx \log b}{k \log b} = \frac{\log a}{k \log b}$

يصبح لدينا $x = \frac{\log a}{k \log b}$

4. نوجد الناتج بالآلة.

ملاحظة : إذا كان $\forall \ a , b \in \mathbb{R}^+$ فإنّ : $a = b \iff \log a = \log b$

حل المعادلات الجذرية باستخدام اللوغاريتم : لحل المعادلة الجذرية ذات الشكل : $x^{\frac{m}{n}} = a$ باستخدام اللوغاريتم نتبع الخطوات :

1. نأخذ لوغاريتم الطرفين $\log x^{\frac{m}{n}} = \log a$
2. نستخدم خاصية القوى $\frac{m}{n} \log x = \log a \quad , x > 0$
3. نضرب الطرفين بـ $\frac{n}{m}$ $\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} \log x = \frac{n}{m} \cdot \log a$

يصبح لدينا $\log x = \frac{n}{m} \log a$

4. نستخدم خاصية القوى $\log x = \log a^{\frac{n}{m}}$
5. نستخدم الملاحظة السابقة يكون $x = a^{\frac{n}{m}}$ نتأكد أن الحل يحقق الشرط في الخطوة الثانية
6. **اللوغاريتم الطبيعي :** يرمز له بـ $\ln a$ حيث :
7. $\ln a = \log_e a \quad , \ a > 0$
8. تطبق خواص اللوغاريتمات المعتادة على اللوغاريتم الطبيعي أيضاً .

10. في ما يلي حيث $k, m, n \in \mathbb{R}^+$.

11. ① $\ln mn = \ln m + \ln n$ خاصية الضرب

12. ② $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$ خاصية القسمة

13. ③ $\ln m^k = k \ln m$ خاصية القوى

14. ④ $\ln e = 1$

15. ⑤ $\ln e^k = k$

16. $e^{\ln k} = k$

حل معادلات لوغاريتمية

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$a = b \Longleftrightarrow \log_m a = \log_m b$

ما بعد اللوغاريتم
في الطرفين متساوي

$\forall\ y, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

$\log_b y = x$

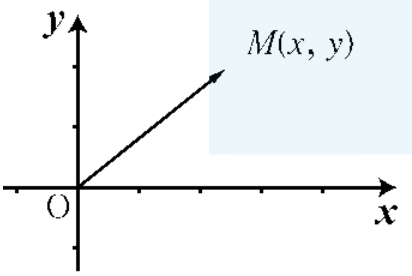
تحول إلى معادلة اسية
$y = a\, b^x$

الوحدة الخامسة: المتجهات

متجه الموضع

تعريف

القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x, y)$ تسمى متجه الموضع، ويمثّلها الزوج المرتب (x, y)



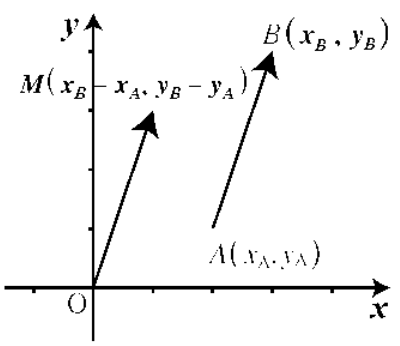
تعريف

$\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي

حيث $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$

حيث $M(x_B - x_A, y_B - y_A)$



تكافؤ قطعتين موجهتين

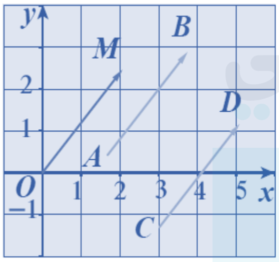
تكون قطعتان موجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه

ولكل قطعتين موجهتين متكافئتين متجه الموضع نفسه.

فمثلًا من الشكل المرسوم $\overline{CD}$ ، $\overline{AB}$ قطعتين موجهتين متكافئتين و $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع لهما.

خاصية

إذا كانت القطعتان الموجهتان $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ متكافئتين، فإن الشكل $ABDC$ هو متوازي أضلاع حيث النقاط A, B, C, D ليست على استقامة واحدة.



إذا كان $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع حيث $M(x_M, y_M)$، فيرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{M}$

ويكتب على الصورة $\overrightarrow{M} = < x_M , y_M >$

وتسمى x_M ، y_M مركبتي المتجه $\overrightarrow{M}$

طول (معيار) متجه واتجاهه

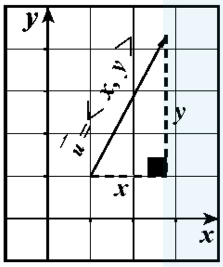
تعريف

لكل متجه $\overrightarrow{U} = < x, y >$ معيار (طول) يرمز له بالرمز $\| \overrightarrow{U} \|$

ويعطى بالعلاقة: $\| \overrightarrow{U} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

يحدد اتجاه المتجه $\overrightarrow{U}$ بالزاوية الموجهة θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

حيث $0^\circ \le \theta < 360^\circ$



$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{عندما } x > 0 , y > 0 \\ 180^\circ - \alpha & \text{عندما } x < 0 , y > 0 \\ 180^\circ + \alpha & \text{عندما } x < 0 , y < 0 \\ 360^\circ - \alpha & \text{عندما } x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

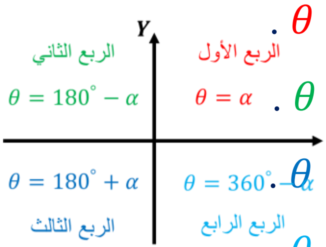
وتحدد زاوية الإسناد α بالعلاقة: $\tan\alpha = \left| \frac{y}{x} \right|$

إذا كانت θ تقع في الربع الأول فإنّ : $\theta = \alpha$.

إذا كانت θ تقع في الربع الثاني فإنّ : $\theta = 180^\circ - \alpha$.

إذا كانت θ تقع في الربع الثالث فإنّ : $\theta = 180^\circ + \alpha$.

إذا كانت θ تقع في الربع الرابع فإنّ : $\theta = 360^\circ - \alpha$.



متجه الوحدة * تعريف: نقول عن المتجه $\vec{U} = < x , y >$ أنه متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة. أي أن $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

تساوي متجهين : ليكن : $\vec{B} =< x_B , y_B >$ ، $\vec{A} = < x_A , y_A >$ فإن :

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow x_A = x_B \quad , \quad y_A = y_B$$

يكون للمتجهين غير الصفريين $< \overrightarrow{CD} >$ ، $< \overrightarrow{AB} >$ الاتجاه نفسه إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{CD} >$

② يكون للمتجهين غير الصفريين $< \overrightarrow{CD} >$ ، $< \overrightarrow{AB} >$ اتجاهين معاكسين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي سالب k يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{CD} >$

③ تكون النقاط A , B , C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{AC} >$

وهما متوازيان في الحالتين

جمع وطرح المتجهات

تعريف : إذا كان $\vec{A} = < x_A , y_A >$ ، $\vec{B} = < x_B , y_B >$ متجهين في المستوي فإن
مجموع المتجهين هو $\vec{A} + \vec{B} = < x_A + x_B , y_A + y_B >$

تعريف : إذا كان $\vec{A} = < x_A , y_A >$ ، $\vec{B} = < x_B , y_B >$ متجهين في المستوي فإن
طرح المتجهين هو $\vec{A} - \vec{B} = < x_A - x_B , y_A - y_B >$

- **المتجه $\vec{i} = < 1 , 0 >$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(1 , 0)$ يسمى « متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور السيني »**
- **المتجه $\vec{j} = < 0 , 1 >$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(0 , 1)$ يسمى « متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور الصادي »**

يمكن التعبير عن أي متجه $\overrightarrow{OA} = < x_A , y_A >$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{j}$ ، $\vec{i}$ كما يلي:

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$

الضرب الداخلي البند (3 - 5)

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \times \|\overrightarrow{B}\| \times \cos(\overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B}) \ , 0^\circ \le m(\overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B}) \le 180^\circ$$

قانون 2 للضرب الداخلي :

إذا كان $\overrightarrow{B} = < x_B , y_B >$ ، $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A >$ متجهين في المستوي فإن :

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B$$

فإذا كان : $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A >$ فإن :

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = x_A \cdot x_A + y_A \cdot y_A = {x_A}^2 + {y_A}^2 = \|\overrightarrow{A}\|^2$$

نتيجة (1) :

$\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ حيث : $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0} , \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$

نتيجة (2) : توازي متجهين

$\overrightarrow{A} // \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \overrightarrow{A} = k\overrightarrow{B}$ حيث : $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0} , \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$

ملاحظة : إذا كان $\overrightarrow{B} = < x_B , y_B >$ ، $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A >$ متجهين في المستوي حيث:

$\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0} , \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$ لإثبات أنّ $\overrightarrow{A} // \overrightarrow{B}$ يكفي أن نثبت أن :

$$x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$$

1. القانون لإيجاد جيب تمام قياس الزاوية المحددة بين المتجهين $\overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{A}$

$$\cos(\overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\| \times \|\overrightarrow{B}\|} \ , 0^\circ \le m(\overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B}) \le 180^\circ$$

2. نستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الزاوية

shift → cos → قيمة الـ cos → =

الوحدة السادسة: الجبر المتقطع (الإحصاء)

الإحصاء : هو علم أساسي في مجال الرياضيات التطبيقية حيث إنه يهتم بجمع البيانات وفرزها وتنظيمها وتصنيفها وعرضها جدوليّا ً أو بيانيا ً وتحليلها واستقراء النتائج بهدف اتخاذ قرارات مناسبة مبنية على استنتاجات .

مراحل البحث الإحصائي هي :
1. جمع البيانات . 2 .عرض البيانات (جدوليّا ً وبيانيا ً) . 3. وصف البيانات وتحليلها .
4.تفسير النتائج واتخاذ القرارات .

المجتمع الاحصائي : هو مجموعة كل المفردات (الوحدات) قيد الدراسة ويكون لها خصائص مشتركة ،
.

كما أن المجتمع الاحصائي يمكن أن يكون **منتهيا ً** (عدد وحداته محدود) أو **غير منته** (عدد وحداته غير محدود)

المتغير : هو الصفة (أو الصفات) التي تكون محور الدراسة في المجتمع الإحصائي .

أساليب جمع البيانات :

① الحصر الشامل : هو عمليه جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة . يتميز الحصر الشامل بدقة نتائجه وخلوه من الأخطاء .

(غالبا ً ما تصعب دراسة مفردات لمجتمع ككل لما تحتاجه من نفقات ووقت وجهد كما أن الحصر الشامل لا يصلح في المجتمعات غير المنتهية لاستحالة حصر مفرداتها في قائمة)

② المعاينة : هي عمليه اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقه مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقيق أهداف الدراسة .

أنواع البيانات : يمكن تصنيف البيانات إلى نوعين :

أولا ً : البيانات الكيفية : البيانات الكيفية هي بيانات نعبر عنها من خلال أسماء أو صفات لتحديد حالة ما للمتغير يوجد لها نوعان

أولا : البيانات الكيفية الأسمية : التي تعطي صفة أو عنوانا ً للمتغير مثل لون الشعر- لون العيون - الجنسية - نوع الجوال - الاسم ......

1 البيانات الكيفية المرتبة : تحدد بمواصفات تراعي ترتيبا ً ترتيبا ً معينا ً مثل تقديرات الطلاب في ماده ما (ممتاز - جيد جدا ً - جيد - مقبول - ضعيف) .

ثانيا ً : البيانات الكمية : البيانات الكمية هي بيانات نعبر عن مفرداتها بقيم عددية وهي نوعان :

A البيانات الكميه المستمرة : وهي بيانات تكون فيها قيمة المتغير عدداً حقيقياً مثل الأطوال - الأوزان - الحجوم - المساحات .....

1 البيانات الكميه المتقطعة : وهي بيانات تكون فيها قيمة المتغير عدداً صحيحاً مثل عدد طوابق الأبنية - عدد درجات السلم - عدد الاشقاء ......

العينات

1 – العينة العشوائية البسيطة

إذا تضمن المجتمع الإحصائي عددًا n من المفردات المتجانسة

2 – العينة العشوائية الطبقية

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{m}{n}$$

حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

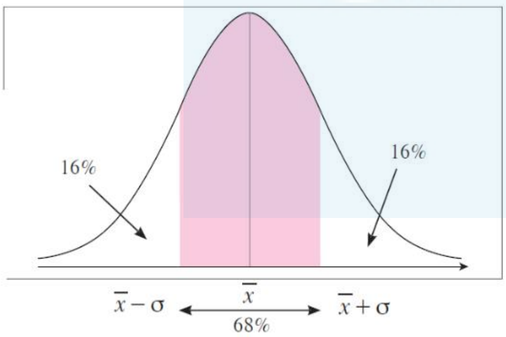
3 – العينة العشوائية المنتظمة

واحدة من العينات الأكثر استخدامًا هي العينة العشوائية المنتظمة حيث يتم سحب مفرداتها بحسب نظام ثابت ومنتظم.

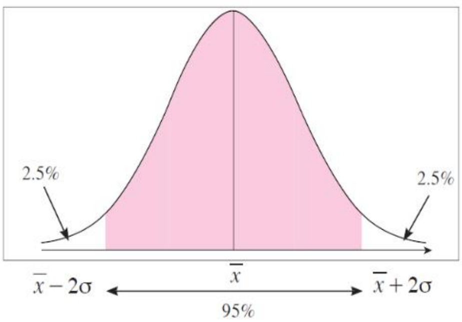
$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

القاعدة التجريبية

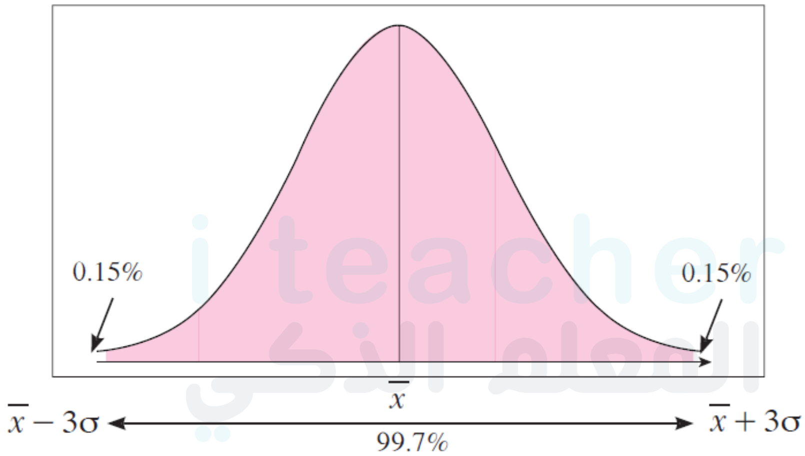
- حوالي 68% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$.

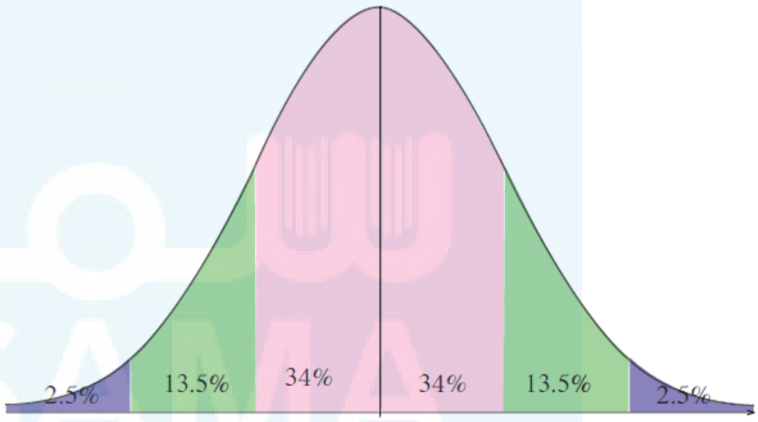


- حوالي 95% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$



- حوالى 99.7% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma]$





القيمة المعيارية

هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} \qquad z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$