سما- المعلم الذكي

i teacher المعلم الذكي

WWW.SAMAKW.NET/AR

تدرّب مع سما

مادة : الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الصف

11

العلمي

www.samakw.com

iteacher_q8

60084568 / 50855008

حولي مجمع بيروت الدور الأول

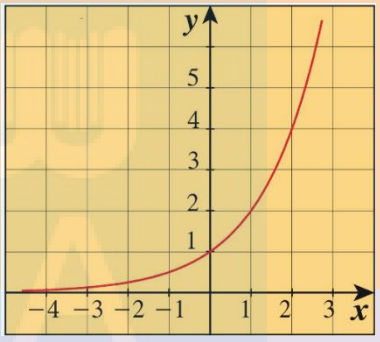
استكشاف النماذج الأسية - البند (1 - 4)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

استخدام الدوال الأسية : الدالة الأسية هي الدالة التي على الصورة :

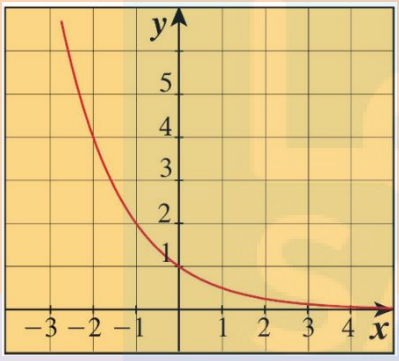
$$y = a\,b^x \quad , \forall x \in \mathbb{R} \quad ، \quad a \in \mathbb{R}^* \quad ، \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

الدالة الأسية التي فيها $a > 0$ يمكن أن تستخدم كنموذج للنمو أو للتضاؤل معتمداً على قيمة b كالتالي :



عندما $b > 1$، فإن الدالة تمثل نمواً أسياً

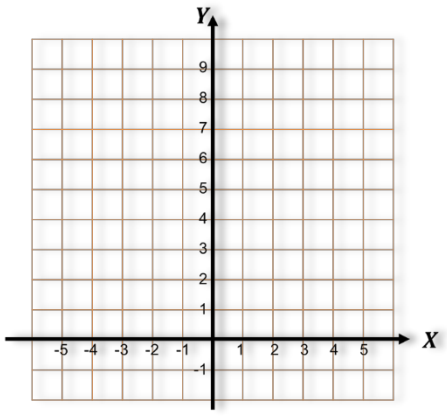
وتكون b هي عامل النمو .



عندما $0 < b < 1$ ، فإن الدالة تمثل تضاؤلاً أسياً

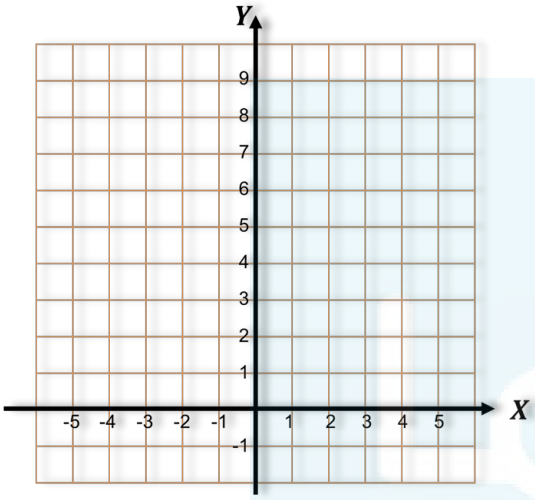
وتكون b هي عامل التضاؤل

حاول أن تحل (1) صـ 127: مثل بيانياً كلاً من الدوال التالية ، ثم بين ما إذا كانت تمثل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً وحدد العامل . $a\ )\ y = 4(2)^x$



$b)\ y = 3^x$

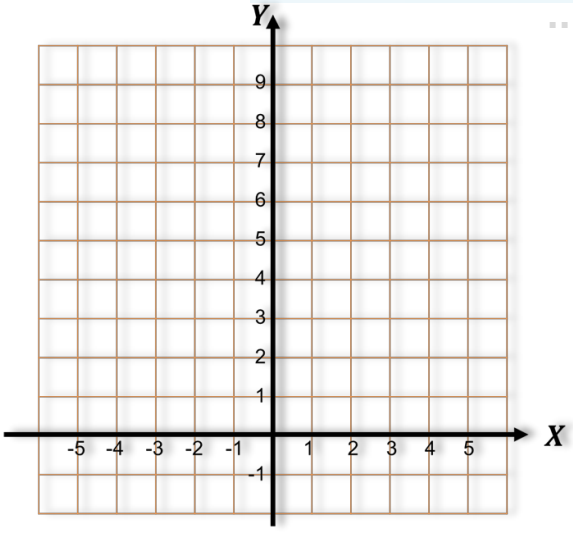
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



حاول أن تحل (2) صـ 128: مثل بيانياً كلاً من الدوال التالية ، ثم بين ما إذا كانت تمثل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً وحدد العامل .

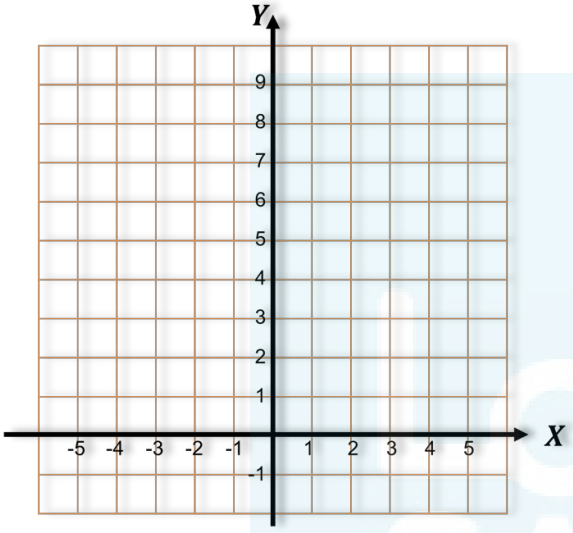
$a)\ y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

$b\ )\ y = 2(0.1)^x$



حاول أن تحل (4) صـ 130: اكتب دالة أسية بالصورة $y = a\,b^x$ يمر بيانها بالنقطتين :

$S(3,16)$ ، $H(2,4)$

الحل:

الدوال الأسية وتمثيلها البياني البند (2 - 4)

ملاحظات :

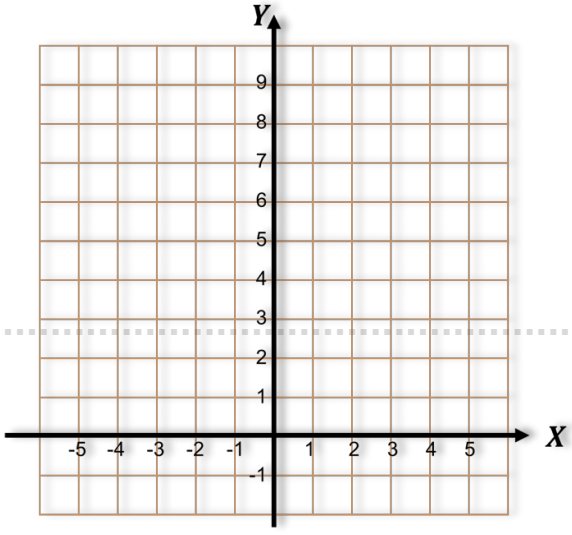
1) بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^{x}$ في المحور الصادي .

2) بيان الدالة $y = -b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = -b^{x}$ في المحور الصادي .

3) بيان الدالة $y = -b^{x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^{x}$ في المحور السيني .

حاول أن تحل (1) صـ 133 : مثل بيانياً كلاً من : $y = 5^{x}$, $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ في نفس المستوى الإحداثي .

الحل :



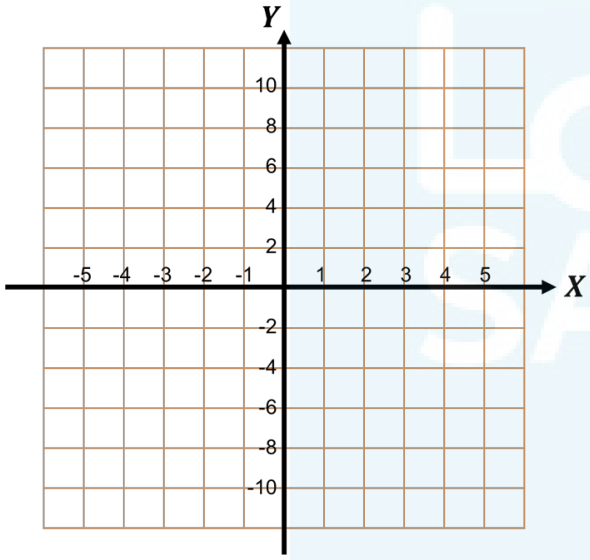
حاول أن تحل (2) صـ 134 :

ⓐ مثل بيانياً في نفس المستوى الإحداثي .

② $y = 4(2)^x$ ① $y = -4(2)^x$

ⓑ ماذا تلاحظ بين بياني كل من الدالتين في ⓐ.

الحل :



التمثيل البياني للدالة الأسية : $y = a\,(b)^{x-h} + k$ **باستخدام دالة المرجع :**

دالة المرجع هي : $y = a\,b^x$

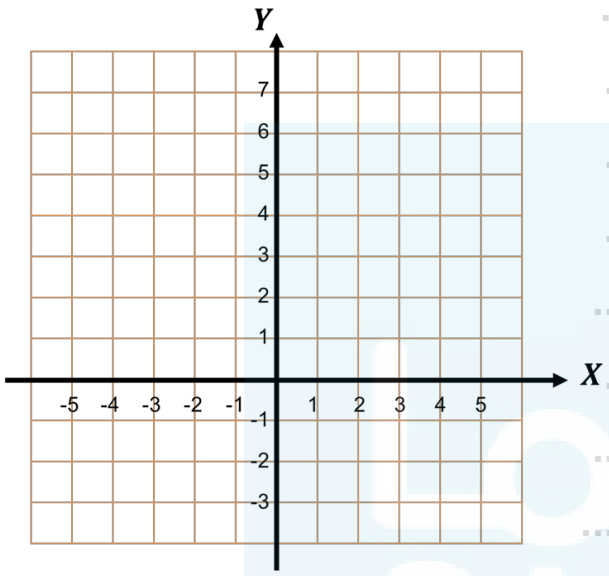
نقوم بالتمثيل البياني لدالة المرجع $y = a\,b^x$ كما مرّ معنا سابقا ثم نقوم بعمل انسحاب أفقي مسافة h وحدة وانسحاب رأسي مسافة k وحدة للحصول على بيان الدالة

$$y = a\,(b)^{x-h} + k$$

حاول أن تحل (3) صـ 135: مثل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع $y = 2(3)^x$

ⓐ $y = 2(3)^{x+1}$ ⓑ $y = 2(3)^x - 4$ ⓒ $y = 2(3)^{x-3} + 1$

الحل:



ملاحظة : بعض الدوال الأسية هي على الصورة : $y = ab^{rx}$ حيث r ثابت ، $r \neq 0$

الرمز e : في الدالة $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ عندما يأخذ x قيماً أكبر فأكبر تقترب قيم y من 2.718 تسمى هذه القيمة e وهو عدد غير نسبي

حاول أن تحل (5) صـ 137: استخدم الحاسبة لإيجاد قيم كل ممايلي

(قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف)

ⓐ e^{4} ⓑ e^{-3} ⓒ $e^{\frac{1}{2}}$

الحل:

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً -البند (3 - 4)

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$y = b^x$	$x = \log_b y$

العدد
الأساس

تدريب صـ 139 : أكمل الجدول التالي :

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} \ldots\ldots = \ldots$
$3^5 = 243$	$\log_3 \ldots\ldots = \ldots$
$4^{\ldots} = \ldots$	$\log_4 2 = \frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$
$12^0 = 1$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

تعريف :

$\forall\, y \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

يتعين عدد حقيقي x بحيث يكون $y = b^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b y$

حاول أن تحل (2) صـ 140 : أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي :

ⓐ $\log_{10} 100$

ⓑ $log_9 27$

ⓒ $\log_{64} \frac{1}{32}$

ملاحظة : $\log x$ هو اللوغاريتم المعتاد ذو الأساس 10 أي : $\log_{10} x$ تكتب $\log x$

فمثلاً : $\log_{10} 4 = \log 4$

تعريف الدالة اللوغاريتمية :

$\forall\, x > 0 \quad , \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن الدالة : $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ , f(x) = \log_b x$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b .

مجال الدالة اللوغاريتمية : هو حل المتباينة ما بعد اللوغاريتم أكبر تماما من الصفر .

حاول أن تحل (4) صـ 142 : أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية :

ⓐ $y = 2 + \log_5 (x - 2)$

الحل:

ⓑ $f(x) = \log_4(x^2 + 1)$

الحل:

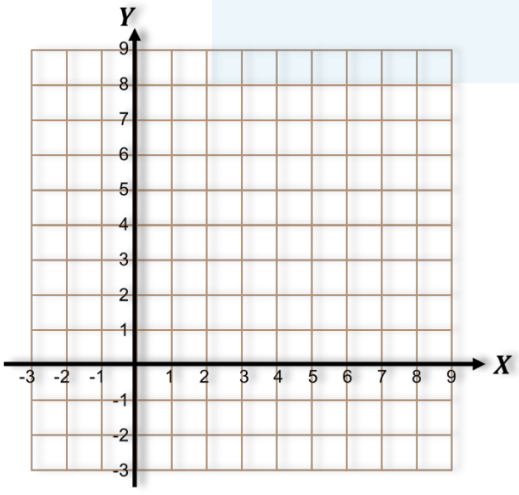
ⓒ $g(x) = \log_7(1 - x)$

الحل:

ملاحظة : بيان الدالة $y = \log_b(x)$ حيث $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المستقيم $y = x$

حاول أن تحل (5) صـ 143: استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة : $y = \log_3 x$ ومعكوسها

الحل:



خواص اللوغاريتمات البند (4 - 4)

خواص اللوغاريتمات : $\forall m, n, b \in \mathbb{R}^+ \ , b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k \log_b m \quad , k \in \mathbb{R}$

ملاحظة : يمكن كتابه مجموع أو فرق اللوغاريتمات (التي لها الأساسات نفسها) بشكل لوغاريتم واحد باستخدام خواص اللوغاريتمات .

حاول أن تحل (1) صـ 145:

ⓐ أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد .

① $\log_5 2 + \log_5 6$

الحل:

② $3 \log_b 4 - 3 \log_b 2$

الحل:

③ $4 \log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

الحل:

حاول أن تحل (2) صـ 146: أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث a , b , c أعداد حقيقية موجبة .

ⓐ $\log_2(7b)=$

ⓑ $\log\left(\frac{c}{3}\right)^2=$

ⓒ $\log_7(a^3b^4)=$

ملاحظات : إذا كان m , b عددان حقيقيان موجبان ، $b \neq 1$ فإنّ :

① $\log_b 1 = 0$ ② $\log_b b = 1$ ③ $\log_b b^m = m$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية - البند (5 - 4)

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتم :

1. نأخذ لوغاريتم الطرفين $\log b^{kx} = \log a$
2. نستخدم خواص اللوغاريتمات $kx \log b = \log a$
3. نقسم الطرفين على $k \log b$ $\frac{kx \log b}{k \log b} = \frac{\log a}{k \log b}$

يصبح لدينا $x = \frac{\log a}{k \log b}$

ملاحظة : إذا كان $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$ فإنّ : $\log a = \log b \iff a = b$

حاول أن تحل (1) صـ 151: حل كل معادلة مما يلي مقرباً إجابتك إلى أقرب جزء من ألف :

ⓐ $3^x = 4$

الحل:.....

ⓑ $6^x = 21$

الحل:

ⓒ $3^{x+4} = 101$

الحل:

حل المعادلات الجذرية باستخدام اللوغاريتم : لحل المعادلة الجذرية ذات الشكل : $x^{\frac{m}{n}} = a$

باستخدام اللوغاريتم نتبع الخطوات :

1. نأخذ لوغاريتم الطرفين $\log x^{\frac{m}{n}} = \log a$
2. نستخدم خاصية القوى $\frac{m}{n}\log x = \log a \quad , x > 0$
3. نضرب الطرفين بـ $\frac{n}{m}$ $\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}\log x = \frac{n}{m}\cdot\log a$

   يصبح لدينا $\log x = \frac{n}{m}\log a$
4. نستخدم خاصية القوى $\log x = \log a^{\frac{n}{m}}$
5. نستخدم الملاحظة السابقة يكون $x = a^{\frac{n}{m}}$ نتأكد أن الحل يحقق الشرط في الخطوة الثانية

حاول أن تحل (2) صـ 152: حل كل معادلة مما يلي :

ⓐ $t^{\frac{7}{2}} = 128 \quad , t > 0$

ⓑ $\sqrt[3]{u^4} - 5 = 11 \quad , u > 0$

قاعدة تغير الأساس : إذا كان $\forall\, m, b, c \in \mathbb{R}^+ \;,\; b \neq 1 \;,\; c \neq 1$ فإنّ :

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

مثال :

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_5 9}{\log_5 4} = \frac{\log 9}{\log 4}$$

حاول أن تحل (3) صـ 153: أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حولها إلى لوغاريتم للأساس 8

حاول أن تحل (4) صـ 153: استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة : $7^{5x} = 3000$

حل المعادلات اللوغاريتمية :

كل معادلة تتضمن تعبيراً لوغاريتمياً تسمى معادلة لوغاريتمية

لحل المعادلة اللوغاريتمية نتبع الخطوات :

1. نوجد مجال التعريف (شرط الحل) ما بعد كل لوغاريتم يجب أن يكون أكبر تماما من الصفر ثم نقاطع الحلول إذا كان هناك أكثر من لوغاريتم .
2. نكتب المعادلة بدلالة لوغاريتم واحد (إذا كان هناك أكثر من لوغاريتم) باستخدام خواص اللوغاريتمات أي نكتبها بالصورة : $\log_b y = a \quad \forall y , b \in \mathbb{R}^+ , b \neq 1$
3. نحول المعادلة للصورة الأسية : $y = b^a$
4. نبسط ونوجد الحلول ثم نقبل الحلول التي تحقق شرط الحل ونرفض ما عدا ذلك .

حاول أن تحل (5) صـ 155: حل المعادلة : $\log(7 - 2x) = -1$

الحل:

حاول أن تحل (6) صـ 156: حل المعادلة : $\log 6 - \log 3x = -2$

الحل:

مثال (7) صـ 156: أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية مستخدماً خواص اللوغاريتمات

ⓑ $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $x \in (1, \infty)$

ⓒ $\log_{x+1} 32 = 5 \quad , \quad x \in (0, \infty)$

حاول أن تحل (7) صـ 76: أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية :

ⓐ $\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1 \quad , \quad x \in (1, \infty)$

الحل

ⓑ $\log_4(x+6) - \log_4 12 = \log_4 2 - \log_4(x-4) \quad , \quad x \in (4, \infty)$

في التمارين (15 – 21)، حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي :

(15) $\log 6x - 3 = -4$	(16) $\log x - \log 3 = 8$
(17) $\log_2(3x - 5) = 1$	(18) $\log(2x) + \log(x - 3) = \log 8$
(19) $\log(3x) - \log(x + 20) = -\log 2$	

اللوغاريتم الطبيعي البند (6 - 4)

اللوغاريتم الطبيعي : يرمز له بـ $\ln a$ حيث :

$$\ln a = \log_e a \ , \ a > 0$$

في ما يلي حيث $k, m, n \in \mathbb{R}^+$.

① $\ln mn = \ln m + \ln n$ خاصية الضرب

② $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$ خاصية القسمة

③ $\ln m^k = k \ln m$ خاصية القوى

④ $\ln e = 1$

⑤ $\ln e^k = k$

⑥ $e^{\ln k} = k$

حاول أن تحل (1) صـ 159: استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل $e^{4(x+1)} = 32$

حاول أن تحل (3) صـ 160: حل كل من المعادلات التالية :

ⓐ $e^{\frac{2x}{5}} + 7.2 = 9.1$

ⓑ $5 + \ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7$

حاول أن تحل (4) صـ 161: حل كل من المعادلات التالية :

ⓐ $e^{x+1} = 30$

ⓑ $2^{2x-3} + 4 = 7$

(17) $2e^{3x-2} + 4 = 16$

الحل:..

(18) $2e^{2x} = e^{x} + 6$

الحل:

في التمارين (19 – 28)، حل كل معادلة مما يلي

(19) $\ln 3x = 6$

الحل:

(20) $\ln(4x - 1) = 36$

الحل