المحتويات

	محتويات الوحدة	الوحدة
	١-١ خواص نظام الأعداد الحقيقة	الأولى الجبر – الأعداد والعمليات عليها
	١	
	١-٣ حل المتباينات	
	١-٤ القيمة المطلقة	
	١-٥ دالة القيمة المطلقة	
	١-٦ حل نظام معادلتين خطيتين	
	١-٧ حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد	
	٢-١ الزوايا وقياساتها	الثانية حساب المثلثات
	٢-٢ النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما	
	٢-٣ ظل الزاوية ومقلوبه	
	٢-٤ النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة	
	٢-٥ حل المثلث قائم الزاوية	
	٢-٦ زوايا الارتفاع والانخفاض	
	٢-٧ القطاع الدائري والقطعة الدائرية	
	٣-١ النسبة والتناسب	الثالثة الجبر – التغير
	٣-٢ التغير الطردي	
	٣-٣ التغير العكسي	
	٤-١ المضلعات المتشابهة	الرابعة الهندسة المستوية
	٤-٢ تشابه المثلثات	
	٤-٣ التشابه في المثلثات قائمة الزاوية	
	٤-٤ التناسبات والمثلثات المتشابهة	
	الربط بالتعلم السابق : العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما	
	٥-١ الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)	الخامسة المتتاليات (المتتابعات)
	٥-٢ المتتالية الحسابية	
	٥-٣ المتتالية الهندسية	
	البنود الموضوعية	

الوحدة الأولى

الجبر - الأعداد والعمليات عليها

(١-١) خواص نظـــام الأعـــداد الحقيقـــة

١- الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية

الأعداد النسبية

أمثلة: $\frac{1}{3}$ ، ٠,١٤ ، ٠ ، $-2\frac{1}{3}$

الأعداد الصحيحة

...، -٢، -١، ٠ ، $-2\frac{1}{3}$

الأعداد الطبيعية (الكلية)

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

الأعداد غير النسبية

أمثلة:

$\sqrt{3}$

π

$\sqrt[3]{5}$

١,٣٤٣٣٤ ....

حاول أن تحل (ص١٣)

حدد أيّاً من الأعداد التالية نسبياً وأيها عدداً غير نسبي:

$\frac{\sqrt{4}}{3}$ ، $1,\overline{4}$ ، ٥ ، π

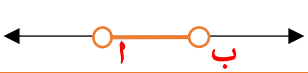
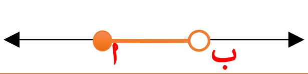
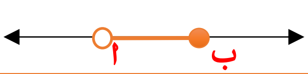
٤- خاصية الكثافة

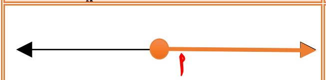
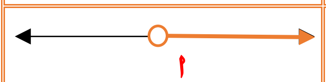
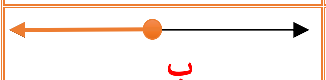
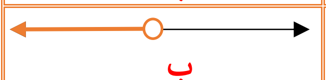
يوجد بين أي نقطتين مختلفتين على خط الأعداد عدد لا نهائي من النقاط، وبالتالي بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الحقيقية.

حاول أن تحل (ص١٣)

أعط ستة أعداد حقيقية بين ١,٤١٤ ، ١,٤١٥.

٥- الفترات

من الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[ا ، ب]	مغلقة	ا ≤ س ≤ ب	
(ا ، ب)	مفتوحة	ا < س < ب	
[ا ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	ا ≤ س < ب	
(ا ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	ا < س ≤ ب	
الأعداد ا ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث ا الحدد الأدنى للفترة ، ب الحد الأعلى للفترة			

من الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[ا ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ≥ ا	
(ا ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة من الأعلى	س > ا	
(-∞ ، ب]	نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س ≤ ب	
(-∞ ، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	

حاول أن تحل (ص١٧)

مثّل كلاً مما يلي على خط الأعداد:

1. [٢ ، ∞) ∪ (-∞ ، -٣)

2. [-١ ، ∞) ∪ (-∞ ، -٥)

تمارين ص ٩

1 حدد أي من الأعداد التالية عدد نسبي وأي منها عدد غير نسبي.

أ) ٣ ____________ ب) π ____________ جـ) -$\sqrt{٠,٤}$ ____________

2 استخدم رمز علاقة < أو > أو = لملء الفراغ بحيث تصبح كل عبارة مما يلي صحيحة.

أ) ٣,١٤ ☐ π ب) ٠,١٤ ☐ $\sqrt{١٠}$ جـ) $٠,\overline{٣}$ ☐ ٠,٣

3 أكتب أربعة أعداد بين العددين ٥,١٣ ، ٥,١٤ .

4 في التمارين (١-٣) حدد أي من الأعداد التالية عدد نسبي وأي منها عدد غير نسبي.

أ) $\sqrt{٦}$ ب) ٠ جـ) $٠,\overline{٦}$

صل كلّ متباينة بتمثيلها البياني.

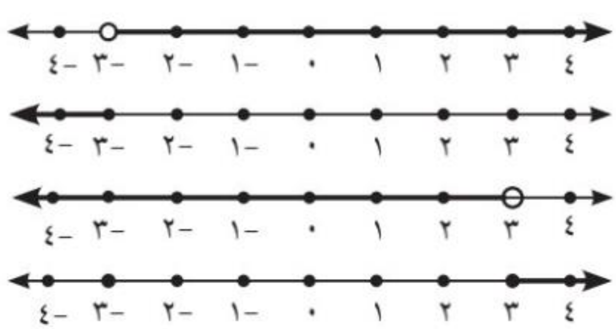
١. س < ٣

٢. س > -٣

٣. س ≤ -٣

٤. س ≥ ٣

(أ)
(ب)
(جـ)
(د)



(١-٣) حـــل المتبـــاينـــات

استخدام خاصية المعكوس الجمعي في حل المتباينات

حاول أن تحل (ص٢٣)

1 أوجد مجموعة حل المتباينة ومل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي:

أ) ص – ٤ ⩽ ١

ب) ١٢ ⩾ س - ٥

حاول أن تحل (ص٢٦)

4 أوجد مجموعة حل المتباينة ثم مثّل الحل على خط الأعداد:

أ) ٣ (س + ٤) + ٥س ⩾ ٢

ب) - ٣ ⩾ ١- ٢س > ٣

حاول أن تحل (ص٢٧)

5 أوجد مجموعة حل المتباينة التالية ، ومثلها على خط الأعداد إن أمكن:

أ) ٢ (٢س - ٨) < ٤س + ٢ .

ب) ٣ س + ٧ < ٣(س – ٣)

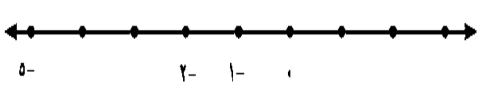
6 هل المتباينتان ٢س < ٢س -١ ، ٢س > ٢س -١ لهما مجموعة الحل نفسها؟

فسّر إجابتك.

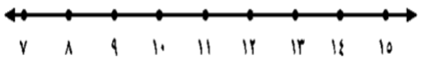
تمارين ص ١٥

7 في التمارين حل كلا من المتباينات التالية. مثّل الحل على خط الأعداد.

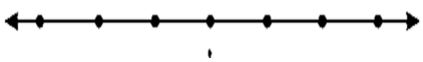
أ) ٢٤س ⩽ -٨



ب) ٨ك -١٥ < ٧٣

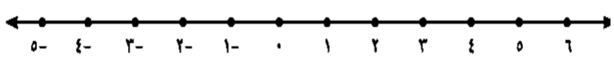


جـ) ٦س -١٣ < ٦ (س-٢)

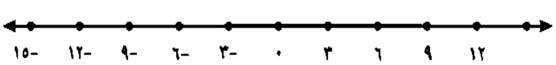


8 أوجد مجموعة حلّ كل زوج من المتباينات. مثّل الحل على خط الأعداد.

أ) ٧س < -٣٥ و ٥س ⩾ ٣٠

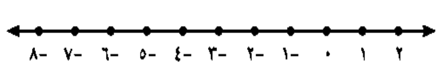


ب) ٩س ⩾ -٢٧ أو ٤س ⩽ ٣٦

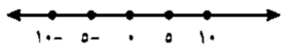


9 في التمارين التالية أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية. مثل الحل على خط الأعداد.

أ) -٥م < ٧

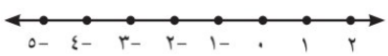


ب) ٢(م -٣) + ٧ < ٢١

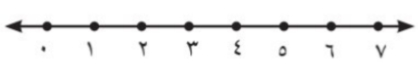


10 فيما يلي أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية، ثم مثل الحل على خط الأعداد.

أ) -٥ < ٢س +٥ < ٣



ب) -٢٧ ≤ ٣ (١ - ٢س) ≤ ٣



(١-٤) القيـــمة المطلـــقة

تعريف

لكل عدد حقيقي س يكون:

|س| = { س إذا كان س > ٠ ، ٠ إذا كان س = ٠ ، -س إذا كان س < ٠ }

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن ١ ، ب ∈ ح

1. | ١ | ⩾ ٠
2. | -١ | = | ١ |
3. | ١ × ب | = | ١ | × | ب |
4. $\left|\frac{١}{ب}\right| = \frac{|١|}{|ب|}$ حيث ب ≠ ٠
5. | ١ | ⩾ ١
6. | ١ - ب | = | ب - ١ |

حاول أن تحل (ص٢٨)

1 أعد تعريف كلّ مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة:

(أ) | س + ٣ |

(ب) | ٤ - ٢س |

حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

1 إذا كان ا عدداً حقيقياً موجباً فإن حل المعادلة |س| = ا هو: س = ا أو س = -ا ويكون مجموعة الحل {-ا ، ا}

2 إذا كان ا عدداً حقيقياً سالباً فإن المعادلة |س| = ا مجموعة حلها ∅

3 إذا كان ا = ٠ فأن |س| = ا مجموعة حلها {٠}.

حاول أن تحل (ص٢٩)

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين:

أ |٥س +٣| = ٨

ب |٢س -١| = ٠

حاول أن تحل (ص٣٠)

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: ٥+ |-٢س +٤| = ٠

2 أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين: تدرب

أ ٣ |٢س +٤| - ٦ = ٠

ب |٥س -٤| + ٣ = ٠

مثال ٥ (ص٣١)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢م - ٣| = |م + ١|

حاول أن تحل (ص٣٢)

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين التاليتين

(أ) |ص - ٥| = |٢ص + ٣| (ب) |س - ٥| = |س - ٧|

استخدم طريقة المساواة أو طريقة التربيع.

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: |٤س - ١| = س + ٢

حاول أن تحل (ص٣٣)

1 أوجد مجموعة حل كل المتباينة: | ٠,٥س - $\frac{٤}{٥}$ | < ٠,٦ ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد.

حاول أن تحل (ص٣٤)

1 أوجد مجموعة حل كل المتباينة: | $\frac{٣}{٥}$ - س | ≥ $\frac{٧}{٨}$ ومثل الحل على خط الأعداد.

تمارين ص ١٨

1 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يأتي:

أ) ٢ | ٣-٢س | =١٤

ب) | س+٤ | +٣٣= ١٧

جـ) | ٢س+٥ | = ٢س +٥

د) | ٢س-٣ | - | ٢س+١ | =٠

3 في التمارين التالية أوجد مجموعة حل كل متباينة ثم مثل الحل على خط الأعداد.

ب) |٣ع − ٦| + ٣ > ١٥

5 أوجد مجموعة حل كل متباينة، ثم مثل الحل على خط الأعداد.

أ) |٢ب + ١| ⩾ −٤

ب) |(س − ٤) / ٢| + ٢ > ٦

الاختيار من متعدد: أحد حلول المعادلة |س − ٣| = س − ٣ هو:

(أ) −٣ (ب) ٠

(جـ) ١ (د) ٣

(١-٥) دالة القيمــة المطلــقة

تعميم

رأس منحنى الدالة ص = | ا س + ب | + جـ هو النقطة (- $\frac{ب}{ا}$ ، جـ)

ملاحظة

رأس منحنى الدالة ص = | ا س + ب | هو النقطة (- $\frac{ب}{ا}$ ، ٠)

حاول أن تحل (ص٣٦)

1 اسم بيانياً الدالة: ص = - | ٢ س + ٣ |.

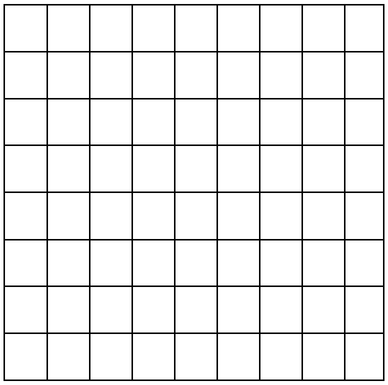
حاول أن تحل (ص٣٩)

1 لكل زوج من الدوال ، قارن بين الرسمين البيانيين. صف كيف يتم الانتقال من الرسم البياني الأول إلى الثاني.

أ ص = |س| ، ص = |س| - ٤

حاول أن تحل (ص٤٠)

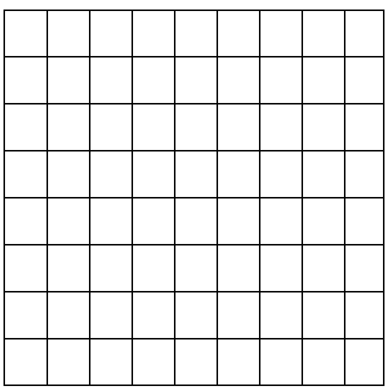
1 استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة: ص = |س| + ٥



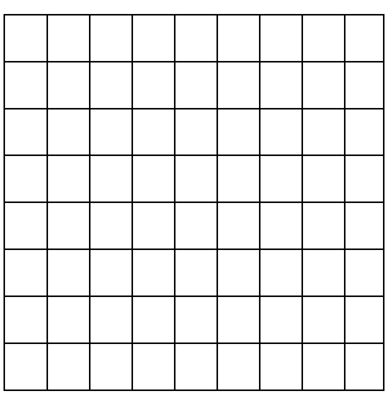
حاول أن تحل (ص٤١)

1 لكل من الدالتين حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل ثم ارسم بيانياً كل دالة مستخدماً الانسحاب:

أ ص = - |س - ٢|



ب ص = - |س + ٣|

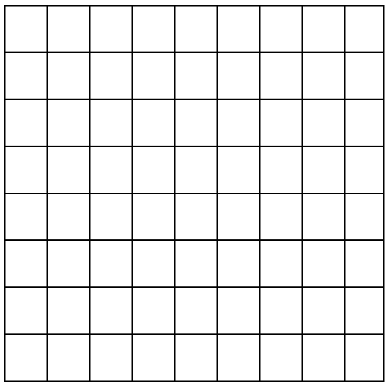


حاول أن تحل (ص٤٢)

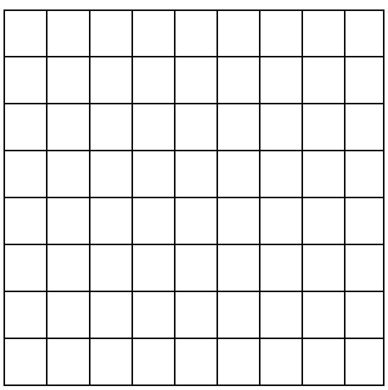
للتدريب

1 استخدم دالة المرجع مسافة الانسحاب لرسم الدالة:

(أ) ص = |س + ٤| + ٣



(ب) ص = - |س - ٥| - ٣



تمارين ص ٢١

5 فيما يلي أي دالة لا يمر بيانها بالنقطة (٠,٥). موضوعي

(أ) ص = |س| +٥

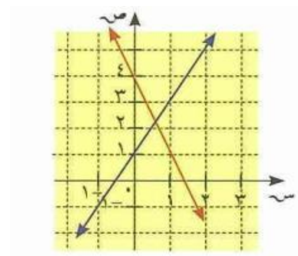
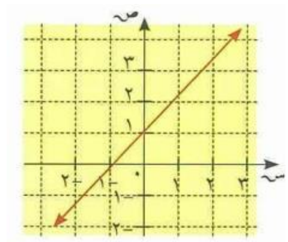
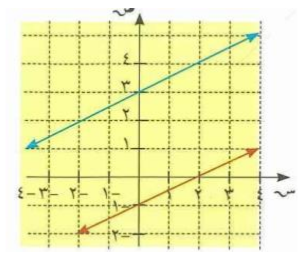
(ب) ص = |س -٥|

(جـ) ص = |س - ٥| + ٥

(د) ص = |س + ٥|

(٦-١) حل نظام معادلتين خطيتين

يمكن لنظام معادلتين خطيتين أن يكون له حل واحد أو لا حل، أو عدد لا نهائي من الحلول.

		
المستقيمان متقاطعان **للنظام حل واحد**	**المستقيمان منطبقان** **للنظام عدد لا نهائي من الحلول**	**المستقيمان متوازيان غير منطبقين** **لا حل للنظام**

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبرياً بطريقة الحذف. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات

حاول أن تحل (ص٤٥)

1 استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام.

٢س + ٣ص = ١١
-٢ س +٤ ص = ١٠

حاول أن تحل (ص٤٦)

1 استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام

٢س + ٣ص = ١٢
٥ س - ص = ١٣

يمكن أيضاً حل نظام معادلتين جبرياً بطريقة التعويض.

حدد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

2 حل النظام

ت = ٢ر + ٣
٥ر ــ ٤ت = ٦

مستخدماً طريقة التعويض.

تمارين ص ٢٧

2 أوجد مجموعة حل كل نظام مستخدماً طريقة التعويض.

س= ٣ص -٤
٢ص = ٣س - ٩

3 لكل نظام مما يلي، اختر طريقة الحل التي تراها الأفضل لإيجاد مجموعة الحل.

ب
ص= ٣س + ١
ص = س - ٥

4 أوجد مجموعة حل كل نظام مما يلي مستخدماً طريقة الحذف.

أ
٤س+ ٢ ص = ٤
٦س + ٢ص = ٨

(١-٧) حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

١- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بإكمال المربع

حاول أن تحل (ص٤٧)

1 حل المعادلة: $س^٢ - ٨ س = - ١٥$ بإكمال المربع.

٢- استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:

حل المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ ، حيث $أ \neq ٠$ هو : $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

حاول أن تحل (ص٥٠)

1 باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

(أ) $س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$

ب س (س -٢) =٧

مثال ٣ (ص٥٠)

1 حل المعادلة: ٢س^{٢} + ٤س - ٧ =٠

حاول أو تحل (ص٥١)

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: ٤س^{٢} = ١٣س - ٩

٤ - استخدام المميز Δ:

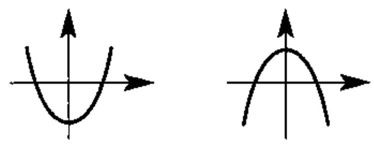
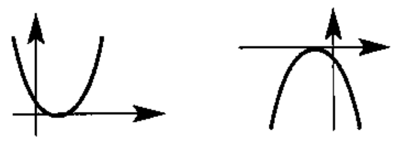
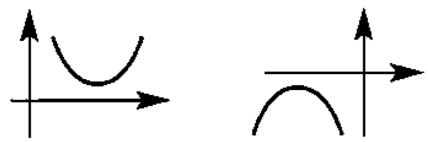
س= $\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ أو س= $\frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

I. عددين حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجباً
II. أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفراً.
III. أو عددين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالباً.

حاول أو تحل (ص٥٣)

1 حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠

تعميم

المميز	نوع جذري المعادلة ا س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، ا ≠ ٠	التمثيل البياني للدالة ص= ا س^{٢} + ب س + جـ، حيث ا ≠ ٠
ب^{٢} - ٤ ا جـ > ٠ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
ب^{٢} - ٤ ا جـ = ٠	الجذران حقيقيان متساويان	
ب^{٢} - ٤ ا جـ < ٠ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	
❶ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} موجبة يكون المنحنى بالشكل ∪ ❷ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} سالبة يكون المنحنى بالشكل ∩		

٥- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

إذا كان جذرا المعادلة: ا س^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما: م، ن

فإن : م + ن = - $\frac{ب}{ا}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{ا}$

٦- إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:

حاول أو تحل (ص٥٥)

❶ بدون حلّ المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٤س^{٢} - ٩س + ٣ = ٠، إذا وجدا.

حاول أو تحل (ص٥٦)

1 إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: ﺍس٢ - ٥س + ٢ = ٠، يساوي. فأوجد قيمة ﺍ، ثم حل المعادلة.

٧- إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

المعادلة على الصورة: س٢ – (م + ن) س + م ن =٠

هـ معادلة بمعلومية مجموع الجذرين وناتج ضربهما

حاول أو تحل (ص٥٧)

1 إذا كان جذرا المعادلة: س٢ - ٥س + ٦ = ٠، هما (ل ، م) فكوّن معادلة تربيعية جذراها (٢ل،٢م).

تمارين ص ٣٣

2 أوجد مجموعة حل كل معادلة فيما يلي:

- س^{٢} -٤س + ٤ =٠
- م (٣م -٤) =٢
- م٢ = ٢م -٦

3 بدون حل المعادلة أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: س^{٢} = ٨س +١٢=٠

4 أوجد مجموعة قيم ب التي تجعل المعادلة: $٨س^{٢} + ب س + ٢ = ٠$ ليست لها جذور حقيقية.

8 أوجد مجموعة حل المعادلة: $-٣ م^{٢} - ٢م + ٧ = ٠$

9 اكتب معادلة من الدرجة الثانية يكون جذراها -٣، ٦.

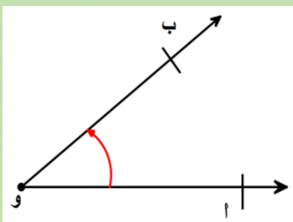
الوحدة الثانية
حساب المثلثات

(٢-١) الزوايا وقياساتها

١- الزاوية

تعلمنا سابقاً أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى " راس الزاوية"، والشعاعان هما ضلعا الزاوية.

الزاوية الموجهة

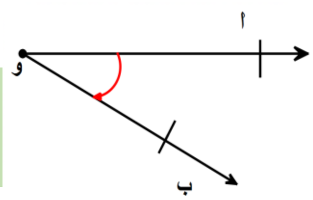


في الشكل المقابل رأس الزاوية هو نقطة "و" وضلعا الزاوية هما و ا ، وب ونرمز للزاوية بالرمز (او ب)،وتسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الموجهة ويرمز لها أيضاً (و ا، وب) ويسمى و ا الضلع الأساسي أو الضلع الابتدائي، وب الضلع النهائي لها.

الزاوية الموجهة الموجبة

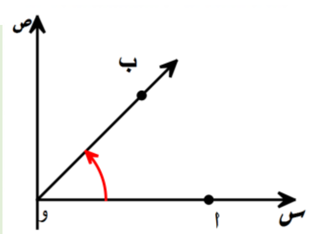
إذ كان الضلع الابتدائي هو و أ والضلع النهائي لها هو وب كما بالشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون موجباً.

الزاوية الموجهة السالبة



إذا كان الضلع الابتدائي هو وأ والضلع النهائي هو وب كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكو ن سالباً.

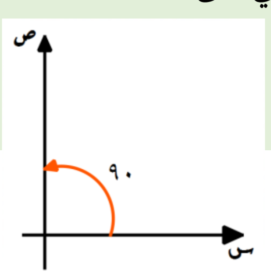
الزاوية الموجهة في الوضع القياسي



تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها ينطق على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.

الزاوية الربعية هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا:

٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠°، -٩٠°، -١٨٠° ، -٢٧٠°، -٣٦٠°



٢- أنظمة قياس الزاوية

توجد أنظمة مختلفة لقياس الزاوية، أهمها ١- القياس الستيني و ٢ - القياس الدائري.

أولاً: القياس الستيني:

في هذه القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى ٣٦٠ قسماً متساوياً، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة لقياس الزوايا في هذه القياس ويرمز إله بالرمز(°). قياس الزاوية القائمة يساوي ٩٠° . قياس الزاوية المستقيمة يساوي ١٨٠°.

حاول أو تحل (ص٦٤)

1 اكتب كلاً مما يلي بالقياس الستيني.

أ $\frac{٧}{٣٢}$ الزاوية القائمة

ب ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة

2 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٣}{٧}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني.

ثانياً: القياس الدائري (الراديان):

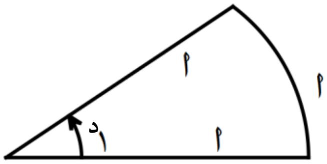
تعريف القياس الدائري

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز إليه بالرمز هـ^د

$هـ^د = \frac{ل}{نق}$ ومنها $ل = هـ^د \times نق$

تعريف الزاوية النصف قطرية



هي زاوية مركزية في دائرة تحضر قوساً طوله يساوي نصف قطر هذه الدائرة.

وقياس الزاوية نصف القطرية يساوي ١ راديان(١°)

حاول أو تحل (ص٦٦)

1 دائرة طول نصف قطرها ٦سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها.

أ) $(١,٢)^{د}$ ب) $(١,٥٧)^{د}$

قانون

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ^د وقياسها الستيني س° فإن :

$\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}}$ ومنها $س^{\circ} = هـ^{د} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$ $هـ^{د} = \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$

حاول أو تحل (ص٦٧)

1 **أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:**

أ) ٤٥° ب) ٣٠٠° جـ) ٢٢٥° د) ١٥٠°

2 أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) $\frac{\pi}{٣}$ جـ) $\frac{\pi}{٦}$ د) $\frac{\pi}{٤}$

3 حدد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية: π ، ٢٥٠° ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، ٣٣٠°

تمارين ص ٤٢

1 أوجد كلاً مما يلي بالقياس الستيني (بالدرجات والدقائق)

أ) $\frac{٣}{٨}$ الزاوية القائمة.

ب) $\frac{٧}{١٦}$ الزاوية المستقيمة.

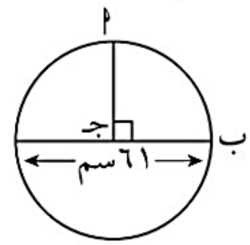
6 أجب بصح أو خطأ : موضوعي

Ⓐ ٠,٦٢٥ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني ٣٠′١١° .

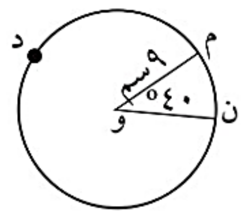
Ⓑ الزاوية التي قياسها $\frac{11\pi}{9}$ع في الربع الرابع.

6 أوجد طول القوس.

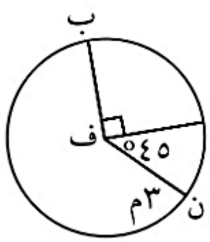
(أ) $\overset{\frown}{\text{أب}}$



(ب) $\overset{\frown}{\text{م د ن}}$

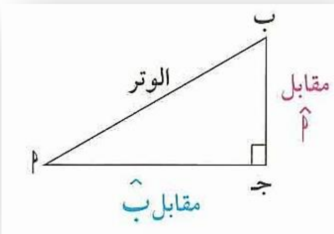


(جـ) $\overset{\frown}{\text{ن ب}}$



(٢-٢) النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما

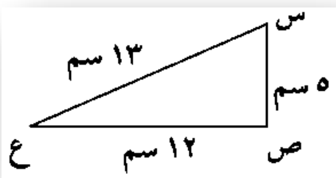
جيب الزاوية



في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر تسمى جيب الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جا) بالإنكليزية (sin).

جيب الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

حاول أو تحل (ص٦٧)

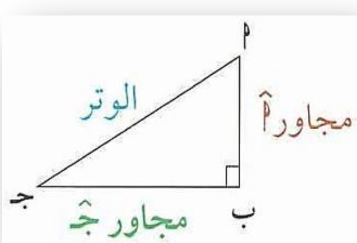


1 Ⓐ اثبت أن المثلث س ص ع قائم في صَ

Ⓑ أوجد جا س ، جا ع

جيب تمام الزاوية

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المداور للزاوية الحادة إلى طول الوتير تسمى جيب تمام الزاوية. ويرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنكليزية (cos)



جيب تمام الزاوية =

جيب تمام الزاوية جـ: جتا جـ $\frac{\text{مجاور جـ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ =

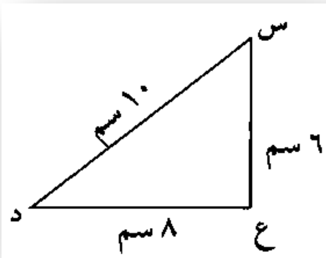
جيب تمام الزاوية أ : جتا أ = $\frac{\text{مجاور أ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

حاول أو تحل (ص٧١)

1 ⓐ اثبت أن المثلث س ع د قائم في ع .

ⓑ أوجد كلا من : جا(سَ) ، جتا (سَ) ، جا(دَ) ، جتا (دَ)

ⓒ ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين سَ ، دَ



مقلوبات الجيب وجيب التمام

مقلوب جا ا هو $\frac{١}{\text{جا ا}}$ ويسمى قاطع الزاوية ا ويرمز إليه بالرمز قتا ا وبالإنكليزية (cosec) Cosecant

قتا ا = $\frac{١}{\text{جا ا}}$: جا ا ≠ ٠ قتا ا × جا ا =١

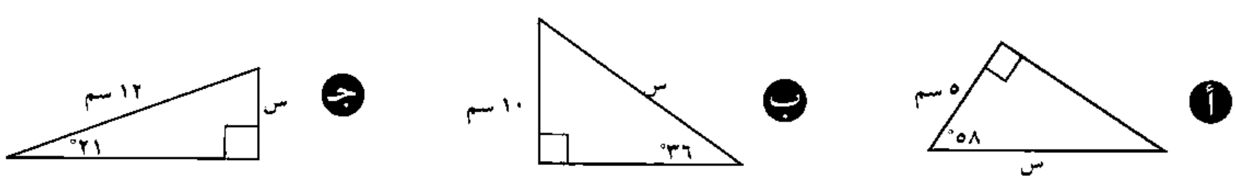
قا ا = $\frac{١}{\text{جتا ا}}$: جتا ا ≠ ٠ قا ا × جتا ا =١

حاول أو تحل (ص٧٢)

1 أ ب ج مثلث فيه : أ ب = ٧سم ، ب ج = ٢٤سم ، أ ج = ٢٥سم.اثبت أن Δ أ ب ج قائم الزاوية، ثم أوجد جا أ، جتا أ، قا أ ، قتا أ، جا ج ، جتا ج ، قاج ، قتاج

حاول أو تحل (ص٧٣)

1 أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة:



إيجاد قياس زاوية علم جيبها أو جيب تمامها.

تريد معرفة قياس زاوية، تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبها المثلثية. إذا كان جاد=ص فإننا نستخدم الآلة الحاسبة ف إيجاد قياس الزاوية د.

نتقر على : ص Sin Shift لإيجاد د.

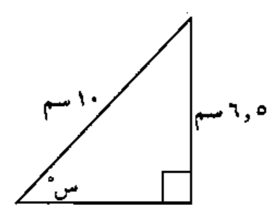
,إذا كانت جتاد = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د

نتقر على : س Cos Shift لإيجاد د.

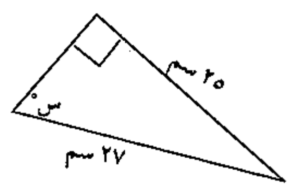
حاول أو تحل (ص٧٤)

1 أوجد قيمة س° لأقرب درجة:

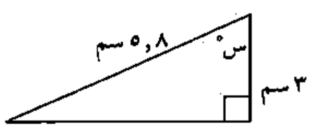
أ



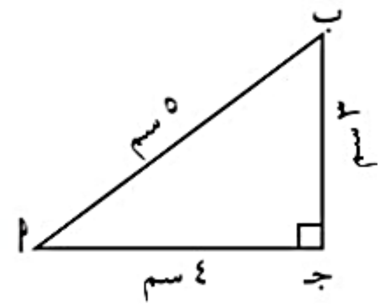
ب



جـ

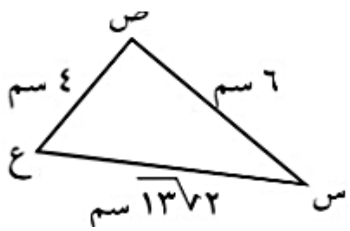


تمارين ص ٤٥

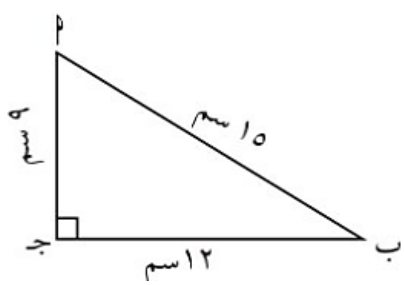


1 في المثلث أ ب جـ القائم في جـ ، أوجد:

أ) قا ا　　　　ب) قتا ب



2 اثبت أن المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص .

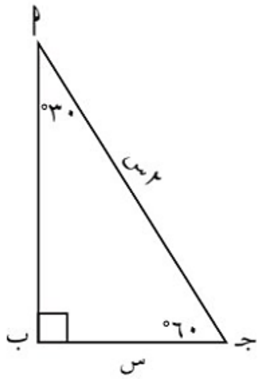


4 في الشكل المقابل، أوجد: قاب ، قتا ب، قا أ ، قتا أ.

4 Δ أ ب جـ فيه : ق (أ) = ٣٠° ، ق (جـ) = ٦٠ ° .

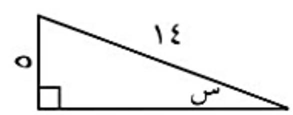
إذا كان ب جـ = س ، فإن أ جـ = ٢ س نظرية .

أحسب كلاً من : أب، جا ٣٠ ° ، جتا ٣٠ ° ، جا ٦٠ ° ، جتا ٦٠ °.

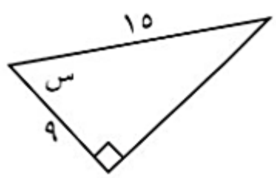


5 أوجد قياس الزاوية س إلى أقرب درجة .

(أ)



(ب)



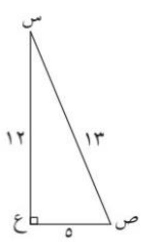
موضوعي ٤٦

في التمرينين (٩، ١٠) اختر الإجابة الصح.

٩ إذا كان أب جـ مثلث قائم في بَ، فإن قيمة جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{جـ}\right)$ هي:

(أ) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ (ب) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ (جـ) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ (د) $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

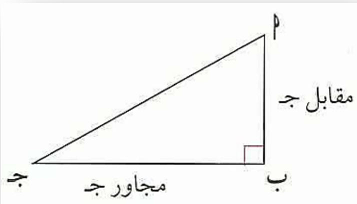
١٠ في الشكل المقابل: المثلث س ص ع قائم في عَ ، فإن جتا^{٢}س + جا^{٢}س يساوي:



(أ) ١- (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{١٧}{١٣}$

(٢-٣) ظـل الزاوية ومقلـوبه

في المثلث قائم الزاوية نسبة طول الضلع المقابل لزاوية حادة إلى طول الضلع المجاور للزاوية نفسها تسمى ظل الزاوية ونرمز إليها بالرمز ظا جـ وبالإنكليزية Tangent(tan)

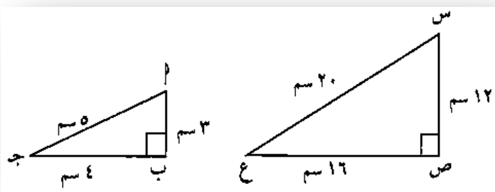


ظل الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

حاول أو تحل (ص٧٥)

1 (أ) استعن بالمثلثين المجاورين في إيجاد:

$\frac{\text{أب}}{\text{س ص}}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}$ ، $\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}$ ماذا تستنتج ؟



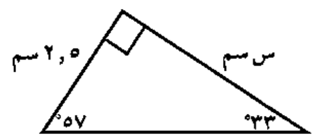
(ب) هل ظا س = ظا أ ، ظا ع = ظا جـ ؟ ما تستنتج؟

(جـ) هل هذا صحيح بالنسبة إلى النسب: جاس، جا أ وكذلك جتاس، جتا أ؟ ماذا تستنتج؟

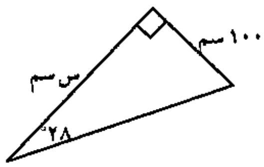
حاول أو تحل (ص٧٦)

1 **أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.**

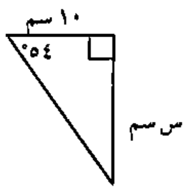
أ



ب



ج



إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها.

قد تعلم ظل زاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية نسبتها المثلثية:

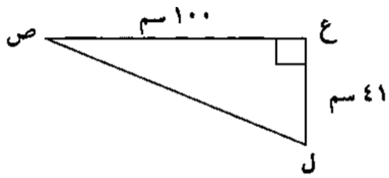
إذا كان ظا θ = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية θ.

نقر على : س tan Shift لإيجاد θ.

حاول أو تحل (ص٧٧)

1 أوجد ق($\hat{س}$) حيث ظا س = ٠,٥.

2 في الشكل المقابل، أوجد ق ($\hat{ل}$) لأقرب درجة.



حاول أو تحل (ص٧٨)

1 احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{١}{٤}$س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

مقلوب ظل الزاوية (ظتا)

مقلوب ظل الزاوية أ $\frac{١}{ظا أ}$ ويسمى ظل تمام الزاوية أ ويرمز إليه بالرمز ظتا أ وبالإنكليزية (cot)

ظتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

ظتا أ = $\frac{١}{\text{ظا أ}}$: ظا أ ≠ ٠

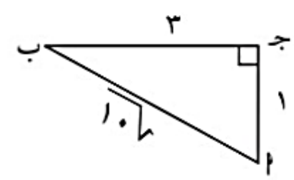
حاول أو تحل (ص٧٩)

1 أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٧سم، أجـ = ٢٥سم . أوجد: ظاجـ ، ظتاجـ

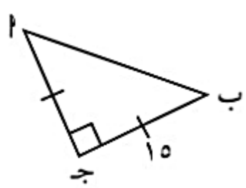
تمارين ص ٤٩

1 **من الشكل اكتب ظا أ ، ظا ب كنسب في كل مما يلي:**

(أ)



(ب)



(٢-٤) النسـب المثلثيـة لبعض الزوايا الخاصة

حاول أو تحل (ص٧٩)

1 ⓐ أ ب جـ مثلـث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجـد طـول الوتر إذا كان طـول أحـد ضلـعي الزاويـة القائمة =٥سم.

ⓑ الحساب الذهني: إذا كان ظاجـ = ١ فكيف توجد ق $(\hat{ج})$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

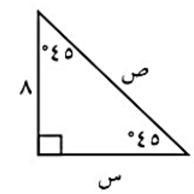
حاول أو تحل (ص٨٢)

1 في مثلـث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{6}$ سم، فأوجد طول الضلعين الآخرين.

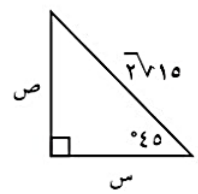
تمارين ص ٥٢

1 أوجد قيمة كل متغير فيما يلي:.

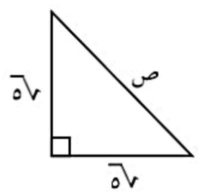
١



٢



٣

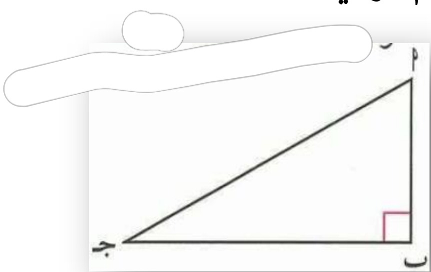


2 أوجد مساحة مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه ١٠ سم.

(٢-٥) حل المثلث قــائم الزاوية

حل المثلث قائم الزاوية

نعلم أن للمثلث ستة عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حلّ المثلث يعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث. سيقتصر عملنا في هذ البند على المثلث قائم الزاوية.



في الشكل المقابل المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في بˆ.

الأضلاع: أب ، أجـ ، ب جـ

الزوايا: أˆ ، بˆ ، جـˆ

غالباً ما يعطي ثلاثة عناصر في المثلث أحدها على الأثل طول أحد الأضلاع ويتعين علينا إيجاد الباقي.

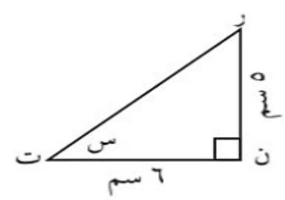
حاول أو تحل (ص٨٥)

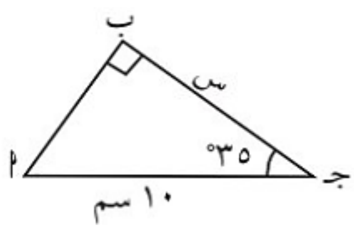
1 حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـˆ حيث: ب جـ = ١٥سم ، أ جـ = ١٢سم.

2 حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في جـ^ حيث: ا جـ = ٢٠ سم، ق (ب^) = ٧٥°.

تمارين

1 أوجد في كل مثلث مما يأتي قيمة س:

أ


ب


2 حل المثلث أ ب جـ القائم في جـ^. قرّب الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة.

أ ق (ب) = ١٢، ٤٧° ، ب جـ = ١٨سم.

ب ب جـ = ٨,٥سم ، أ حـ= ١٤,٧سم.

4 حل المثلث أ ب جـ القائم في جـ̂ ، قرّب الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة.

أ ق (ب) = ٣٩ ° ، ب جـ = ٢٨سم.

ب أ جـ = ٨٤,٢ سم ، ق (أ̂)= ٣٨°.

(٢-٦) زوايا الارتفـــاع وزوايا الانخفــاض

حاول أو تحل (ص٨٧)

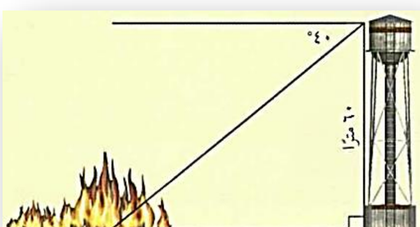
1 من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متراً عن قاعدة مئذنة، وجـد أن قيـاس زاوية ارتفـاع المئذنة ١٢°. أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض.

منصة سما التعليمية
المادة : الرياضيات
الصف ١٠
تدرب مع سماً
سما SAMA

حاول أو تحل (ص٨٨)

1 يقف مراقب برج ارتفاعه ٦٠ متراً. شاهد حريقاً بزاوية انخفاض قياسها ٤٠°.

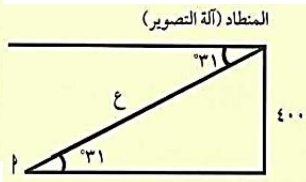
ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟



حاول أو تحل (ص٨٩)

1 زُوِّد منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب عند النقطة ا بزاوية انخفاض ٣١°.يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ متراً

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟

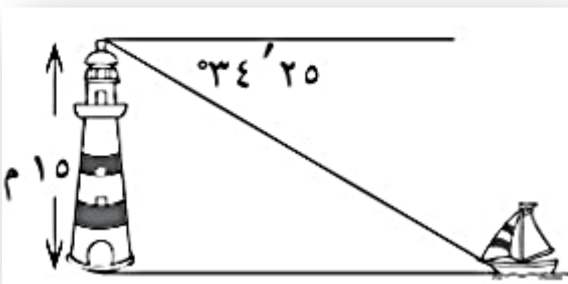


تمارين ص ٦١-٦٢

1 من نقطة على سطح الأرض تبعد ٣٠٠م عن قاعدة برج عمودي وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج هي ١٣° أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض.

2 من نقطة على سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع طائرة ، فوجد أنها ١٢ ٥٤°، إذا كان بعد النقطة عن موقع الطائرة ٣١٠م، فما ارتفاع الطائرة إلى أقرب متر؟

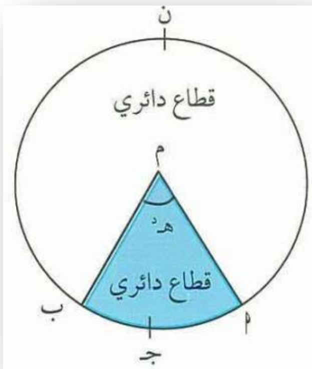
2 رصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ١٥م، فوجد أن قياس زاوية انخفاضه ٢٥ ٣٤° . أوجد إلى أقرب متر البعد بين القارب وقاعدة الفنار.



2 قاس بحار زاوية انخفاض سفينة من أعلى نقطة في فنار ارتفاعه ٢٠٠م فوجد أنها ٣٩°. أوجد بعد السفينة عن قاعدة الفنار.

(٢-٧) القطـاع الدائري والقطعـة الدائرية

تعريف



القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.

مساحة القطاع الدائري

لإيجاد مساحة القطاع الدائري نستخدم التناسب:

نسبة طول القوس إلى طول الدائرة(محيط الدائرة) هي نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة.

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{طول الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

$$\frac{\text{ل}}{٢\pi\text{نق}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\text{نق}^{٢}}$$

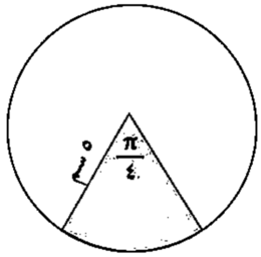
مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{ل}}{٢\pi\text{نق}} \times \pi\text{نق}^{٢}$

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}\text{ل نق}$

حاول أن تحل (ص٩١)

1 أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠سم، وطول قوسه ٤سم.

2 أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



القطعة الدائرية

القطعة الدائرية هي جزء من السطح الدائرة مدود بقوس فيها و وتر.

مساحة المثلث

مساحة المثلث ا ب جـ = ½ ب جـ × ا د

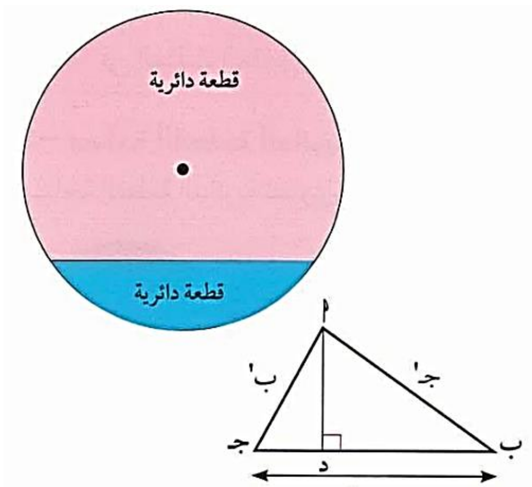
لكن جا ب = أد/أب ∴ اد = اب × جاب

مساحة المثلث اب جـ = ½ ب جـ × ب ا × جاب

مساحة المثلث ا ب جـ = ½ ب جـ × ب ا × جاب

= ½ ب جـ × ا جـ × جاجـ

= ½ ا ب × اجـ × جا ا



أي أن مساحة المثلث = نصف× حاصل ضرب طولي أي ضعلين × جيب الزاوية المحددة بهما.

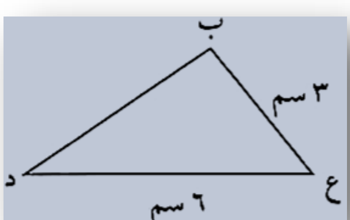
وباختصار نكتب مساحة المثلث أ ب جـ = = ١/٢ أ' جـ' جاب

= ١/٢ أ' ب' × جاجـ

= ١/٢ ب' جـ' جاأ

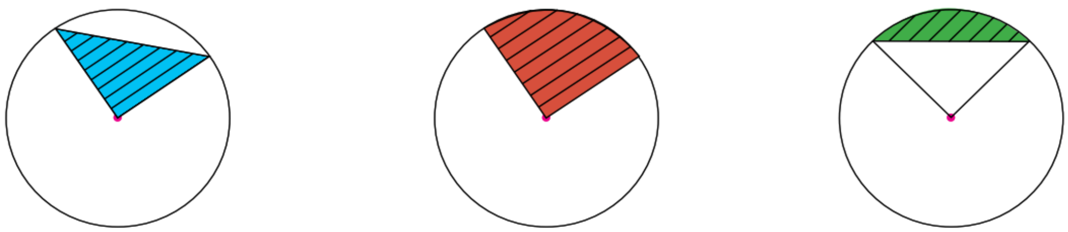
حاول أن تحل (ص٩٢)

1 في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧سم². فأوجد ق (ع̂).



مساحة القطعة الدائرية

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحاً منه مساحة المثلث.



مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري − مساحة المثلث

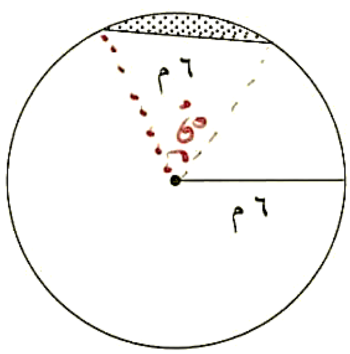
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} (هـ^{د} – جا هـ^{د})

حاول أو تحل (ص٩٤)

1 ⓐ حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)

في هذا الحوق وتر طوله ٦م.

احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى



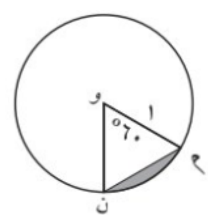
ⓑ أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°.

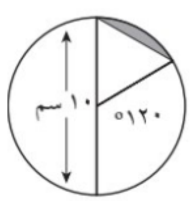
تمارين ص ٦٢

2 قطاع دائري محيطه ٥٣سم، وطول قوسه ٦,٢سم. أوجد مساحته.

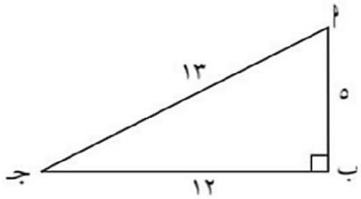
7 قطاع دائري زاوية رأسه ٦٠° ، وطول نصف قطر دائرته ١٠سم. أوجد محيطه.

9 أوجد مساحة القطعة المظللة إلى أقرب جزء من عشرة.





في التمارين (١ – ٩) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:



١- في الشكل المقابل جا(٩٠° – أ) تساوي:

(أ) $\frac{١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{١٢}$

٢- جا جـ قاجـ تساوي:

(أ) ظتاجـ (ب) ١ (جـ) جا^{٢} جـ (د) ظاجـ

٣- قاجـ جتاجـ تساوي:

(أ) قتا^{٢} جـ (ب) ١ (جـ) $\frac{\text{جاجـ}}{\text{ظاجـ}}$ (د) جتا^{٢}جـ

٤- جاجـ ظتاجـ تساوي:

(أ) جتاجـ (ب) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ جـ}}{\text{قاجـ}}$ (جـ) ظتا^{٢}جـ ظاجـ (د) ظاجـ

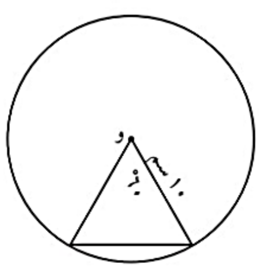
٥- ظا ٤٥° تساوي:

(أ) بين ٠، ١ (ب) أكبر من ١ (جـ) ١ (د) ٠

٦- أب جـ مثلث قائم في بَ فإن أجـ تساوي:

(أ) أب جتاجـ (ب) أب ظاجـ (جـ) أب قتاجـ (د) أب جاجـ

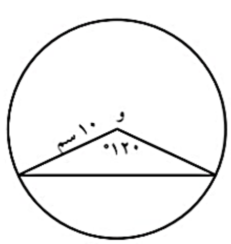
٧- في الشكل المقابل، مساحة القطاع الأصغر تساوي:



(أ) $\frac{٥٠\pi}{٣}$ سم^{٢} (ب) $\frac{١٠٠\pi}{٣}$ سم^{٢}

(جـ) $\frac{٥٠٠\pi}{٣}$ سم^{٢} (د) $\frac{١٠٠}{٣}$ سم^{٢}

٨- في الشكل المقابل مساحة القطعة الدائرية الصغرى (بوحدات المساحة) تساوي:



(أ) ٥٠ $\left(١٢٠ - \frac{\sqrt{٤١}}{٢}\right)$ (ب) ٥٠ $\left(\frac{١٢٠\pi}{١٨٠} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

(جـ) ١٠٠ $\left(\frac{١٢٠\pi}{١٨٠} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ (د) ١٠٠ $\left(١٢٠ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

٩- قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٤٠ سم، ومساحته ٥٠٠ سم^{٢}، فإن طول قوس القطاع (بالسنتيمترات) يساوي:

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ٧٥

الوحدة الثالثة
الجبر - التغير

(٣-١) النسـبة والتنـــاسب

التناسب التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

خاصية التساوي ليكن أ ، ب ، جـ ، د $\in$ ح* ، ك $\in$ ح

إذ كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنّ $\frac{أ}{ب} \times ك = \frac{جـ}{د} \times ك$ ، $ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{جـ}{د}$

حاول أو تحل (ص ١٠١)

1 إذا كان $\frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩}$ فأوجد قيمة ص.

حاول أو تحل (ص ١٠٢)

1 أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٢}{ب} = \frac{٨}{٢٠}$.

مثال ٤ (ص ١٠٣)

1 اثبت أن ٤ ، ١,٥ ، ٨ ، ٣ ، أعداد متناسبة.

حاول أو تحل ٤ (ص ١٠٣)

1 اثبت أن ٤ ,٣ ، ٧ ، ٢,٠٤ ، ٤,٢ أعداد متناسبة.

حاول أو تحل (ص ١٠٤)

1 إذا كانت الأعداد أ ، ب ، جـ متناسبة مع ٣ ، ٥ ، ١١ . فأوجد القيمة العددية للمقدار

$$\frac{\text{أ}+٣\text{ب}}{٥\text{ب}+\text{جـ}}$$

التناسب المتسلسل الهندسي

ليكن أ ، ب ، جـ ∋ ح*

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ فإنه يقال إن أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)وبالعكس : إذا كانت أ، ب ، جـ في تناسب متسلسل فإن: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

ويسمى ب الوسط المتناسب للعددين أ ، جـ أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى أ ، جـ طرفي التناسب.

إذا كان أ ، ب ، جـ ∋ ح* في تناسب متسلسل فإن جـ ، ب ، أ في تناسب متسلسل أيضاً.

مثال (٨) (ص ١٠٦)

1 اثبت أن الأعداد ٣ ، ٩ ، ٢٧ في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل (ص ١٠٦)

1 اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل (ص ١٠٧)

1 هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد -٩ ، س ، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر.

التناسب المتسلسل الهندسي

خاصية (١)

ليكن أ ، ب ، جـ ∈ ح* إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

(أي أن أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل) فإن ب^{٢} = أ جـ **وذلك خاصية الضرب التقاطعي.**

حاول أن تحل (ص ١٠٨)

1 إذا كانت الأعداد ٤ ، س -٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ في تناسب متسلسل ، أوجد قيمة س.

مثال ١١ (ص ١٠٩)

منصة سما التعليمية
المادة : الرياضيات
الصف ١٠

تدرب مع سما

SAMA

1 إذا كانت الأعداد أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل ، فاثبت أن $\frac{أ+ب+جـ}{ب+جـ+د} = \frac{أ}{ب}$

حاول أن تحل (ص ١٠٩)

منصة سما التعليمية
المادة : الرياضيات
الصف ١٠

تدرب مع سما

SAMA

1 إذا كانت الأعداد أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{أ+٣ب}{ب+٣جـ} = \frac{أ-٢ب}{ب-٢جـ}$ (بشرط المقام $\neq$ ٠)

إذا كان $\frac{س}{١٠} = \frac{١٥}{٢٢}$. فإن قيمة س هي:

(أ) $\frac{٧٥}{١١}$ (ب) $\frac{٤٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤٤}$ (د) $\frac{١١}{٧٥}$

تمارين ص ٦٩-٧٠

1 إذا كان(٥س -١):(س+٤) = ٥:٤، أوجد س.

2 أوجد قيمة الرابع المتناسب لكل مما يلي: ١، ٣ ، ٩.

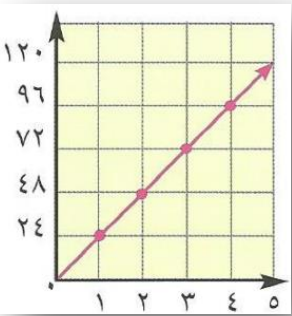
3 إذا كان $\frac{أ+٢ب}{٩أ-ب} = \frac{٥}{٧}$ ، أوجد أ : ب .

4 أوجد س إذا كان $\frac{س+٧}{٧} = \frac{١٣}{٥}$.

(٣-٢) التغــير الطــردي

التغير الطردي

مثال توضيحي



عندما تشاهد فيلما سينمائياً عادياً، فإن ٢٤ صورة فردية تسطع سريعاً على الشاشة كل ثانية. في ما يلي شكل للعلاقة بين عدد الصور (أو الإطارات التي تعرض) وعدد الثواني:

التغير الطردي

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠

ويسمى ك ثابت التغير أو معدل التغير.

ويمكن التعبير عن العلاقة ص = ك س على الصورة ص α س

ملاحظات

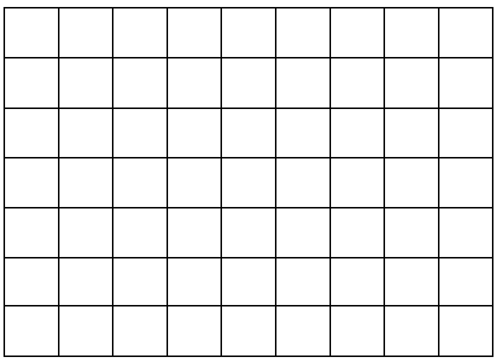
1. يمكن تمثيل دالة التغير الطردي: ص = ك س بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.
2. يمكن كتابة المعادلة الخطية ص = ك س بالصورة : ك = $\frac{ص}{س}$ حيث س ≠ ٠
3. ثابت التغير ك = معدل التغير في البيانات التي تصف التغير.
4. الثابت ك = ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة بيانياً.
5. في حالة التغير الطردي فإن: ثابت التغير = معدل التغير = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغير.
6. التغير قد يكون بالزيادة أو النقصان.
7. إذا كان ص α س فمعنى ذلك أن $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$: المقام ≠ صفر

إذا كانت ص تتغير طردياً مع س أي ص α س فإن:

ص = ك س حيث ك ثابت لا يساوي الصفر.   والعكس صحيح.

حاول أن تحل (ص ١١٢)

1 إذا كانت ص α س وكانت ص = ١,٥ عندما س = ١٠، أوجد قيمة ص عندما س = ١٥. ثم مثل العلاقية بين س ، ص بيانياً.



حاول أن تحل (ص ١١٣)

1 أي من المعادلات التالية تمثل تغيراً طردياً ؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

أ ٧ ص = ٢س

ب ٣ س + ٤ص = ٨

ج ص + ٤س = ٢ (س + ٢ص)

حاول أن تحل (ص ١١٦)

1 هل تتغير ص طردياً مع س في الجدول التالي؟

س	١	١-	٢	٣-
ص	٣	١-	٥	٥-

تمارين ص ٧٢

1 هل كل معادلة فيما يلي تمثل تغيراً طردياً؟ إذا كان كذلك أوجد ثابت التغير.

أ ص= $\frac{٢}{٣}$ س

ب ٧س + ٤ص =٢

جـ - س +٢ص = ٠

2 كل جدول مما يلي يمثل العلاقة بين س ، ص. اختبر ما إذا كانت العلاقة تمثل تغيراً طردياً أم لا.وإذا كانت كذلك فاكتب هذه العلاقة.

س	ص
٢	٦
٥	١٣,٥
٨	٢١

س	ص
٣	٥,٧
٥	٩,٥
٩	١٧,١

3 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ، ب يمثل تغيراً طردياً أوجد ص:

ⓐ أ (١، ٢) ، ب(٦، ص)

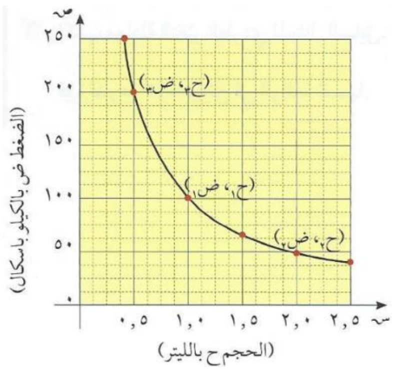
ⓑ أ (٥، ص) ، ب (١٥، ١٢)

4 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ، ب، حيث أ (٨، ٢) ، ب (س، -٣) يمثل تغيراً طردياً فإن س تساوي:

ⓐ ١٢ ⓑ -١٢ ⓒ $\frac{١٦}{٣}$ ⓓ $\frac{-١٦}{٣}$

(٣-٣) التغــير العكــسي

قانون بويل



إن حاصل ضرب حجم الغاز في ضغطة يساوي مقداراً ثابتاً

ح × ض = مقدار ثابت

في كل نقطة في الشكل المقابل حاصر الضرب ثابت.

التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغير كمية أخرى ص بحيث كان حاصل ضرب الكميتين ثابتاً، فإن هذا التغير يسمى تغيراً عكسياً، ويسمى حاصل الضر س ص ثابت التغير، ويرمز إلى ذلك:

س ص = ك أو ص = $\frac{ك}{س}$ ، ك ≠ ٠

يمكن التغير عن التغير العكس بالصورة ص α $\frac{١}{س}$

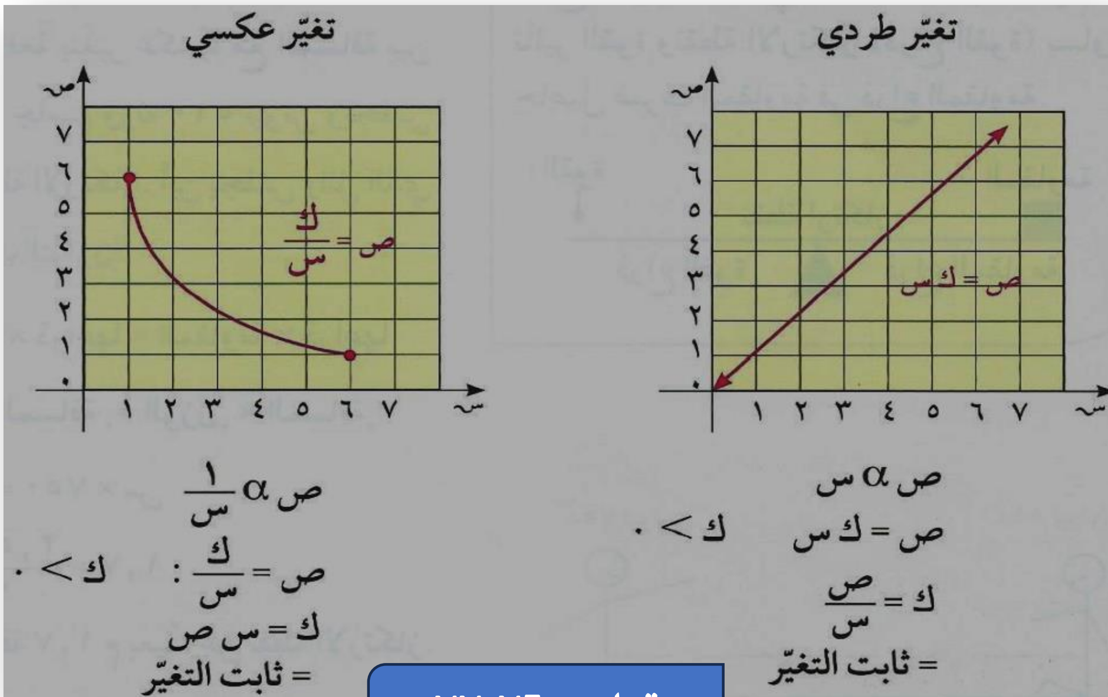
حاول أن تحل (ص ١٢١)

1 (أ) في تغير عكسي ص α $\frac{١}{س}$ إذا كانت ص= ٠,٢ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص= ٣.

(ب) رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥كم/ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠كم/ ساعة.

مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي

يوضح الشكلان البيانيان التاليان الفرق بين التغير الطردي والتغير العكسي.



تمارين ٧٦-٧٧

1 أوجد ثابت التغير لكل من المتغيرات العكسية التالية:

(أ) ن= ٦ عندما ب = ٩.

(ب) ص = ١٣ عندما س = ٧

(جـ) س= ٨ عندما ص = ٩,٥

2 أوجد قيمة م لكي تمثل الأزواج التالية في كل مسألة تناسبات عكسية:

Ⓐ (٥، ٨) ، (٤ ، م)

Ⓑ (٤، ٨) ، (م ، ٢)

3 إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداد متناسبة مع الأعداد ٣، ٥، ٢ فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{٥ أ + ب}{٣ ب + جـ}$:

١	إذا كان ٢س − ٥ص = ٠ فإن $\frac{س}{ص}$ تساوي: (أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٢}$
٢	إذا كان $\frac{س}{ص}$ = ٧ فإن س + ٧ص تساوي: (أ) ٧ س (ب) ٨س (جـ) ٢س (د) ليس أيًا مما سبق صحيحًا
٣	إذا كان أ∝ب، $\frac{١}{جـ}$ ∝ب فإن جـ تساوي: (أ) $\frac{مقدار ثابت}{أ}$ (ب) أ × مقدار ثابت (جـ) ب × مقدار ثابت (د) $\frac{مقدار ثابت}{أب}$

٤	إذا كانت $\frac{\text{س}}{٨} = \frac{١}{\text{ص}}$ فإن إحدى الإجابات الصحيحة هي: (أ) س = $\frac{١}{٤}$ ، ص = $\frac{١}{٢}$ (ب) س = ٢ ، ص = −٤ (جـ) س = ٢ ، ص = ٤ (د) س = −١ ، ص = ٨
٥	إذا كانت ٦، ٩، س، ١٥ في تناسب فإن س تساوي: (أ) ٣٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٠
٦	العدد الذي إذا طرح من كل من الأعداد ١٦، ١٠، ١١، ٧ بالترتيب نفسه صارت متناسبة هو: (أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١
٧	إذا كانت ٤٢ب، س، ٧ب، ٢م أربع كميات متناسبة فإن س تساوي: (أ) ١٤م (ب) $\frac{١}{٣}$م (جـ) ٣م (د) ١٢م
٨	إذا كانت ٢٠، س، ٣٢ في تناسب متسلسل فإن س تساوي: (أ) $\pm ٢\sqrt{١٠}$ (ب) $\pm ٤\sqrt{١٠}$ (جـ) $\pm ٨\sqrt{١٠}$ (د) $\pm \frac{١}{٨\sqrt{١٠}}$
٩	إذا كانت $\frac{\text{س}}{٢\text{ص}} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{\text{س} + ٢\text{ص}}{٢\text{س} - \text{ص}}$ تساوي: (أ) $\frac{١٥}{٩}$ (ب) $\frac{١٦}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{١٦}$ (د) $\frac{٩}{١٥}$
١٠	إذا كان ٢س^{٢} − ٧س ص + ٣ص^{٢} = ٠ حيث ص، س موجبان فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ يمكن أن تساوي: (أ) $\frac{٣}{١}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{١}$ (د) $\frac{-١}{٣}$
١١	الوسط المتناسب بين ٤أ^{٢}ب^{٣}، ٩أ^{٤}ب يساوي: (أ) ±٦أ^{٣}ب^{٢} (ب) ±٦أ^{٢}ب^{٢} (جـ) ±٦أب (د) ±٦أ^{٢}ب
١٢	إذا كانت $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب}}$ تساوي: (أ) $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{جـ}}$ (ب) $\frac{\text{جـ} + \text{د}}{\text{ب}}$ (جـ) $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$ (د) $\frac{\text{جـ} + \text{د}}{\text{د}}$
١٣	إذا كان ص $\propto \frac{١}{\text{س}}$ ، ص = ٥ عندما س = ١٠ فإن س ص تساوي: (أ) ١٠٠ (ب) ٢٥٠ (جـ) ٥٠ (د) ١٥٠

١٤	إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فإن $\frac{س + ص}{٢ص}$ تساوي: (أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٦}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٦}$
١٥	إذا كانت أ، ٣س، ٢ب، ٤س في تناسب فإن $\frac{أ}{ب}$ تساوي: (أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$
١٦	الرابع المتناسب للمقادير $(أ + ب)^٢$، $(أ^٢ - ب^٢)$، $(أ - ب)$ يساوي: (أ) $\frac{أ - ب}{(أ + ب)^٢}$ (ب) $\frac{٢(أ - ب)}{أ + ب}$ (جـ) $\frac{(أ + ب)^٢}{أ - ب}$ (د) $\frac{(أ - ب)^٢}{أ + ب}$
١٧	إذا كانت ص = $\frac{٥}{س}$ فإن: (أ) ص $\propto \frac{١}{س^٢}$ (ب) ص $\propto$ $س^٢$ (جـ) ص $\propto \frac{١}{س}$ (د) ص $\propto$ س
١٨	إذا كان ص $\propto$ س وكانت ص = ٨ عندما س = ٤، فإنه عندما ص = ٦ فإن س تساوي: (أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٨}$
١٩	إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{٢أ - ٣جـ}{٢ب - ٣د}$ تساوي: (أ) $\frac{ب}{د}$ (ب) $\frac{أ}{جـ}$ (جـ) $\frac{ب}{أ}$ (د) $\frac{أ}{ب}$
٢١	مساحة سطح الكرة م = ٤πنق^٢ فإن المساحة م تتناسب طرديًّا مع: (أ) نق (ب) πنق (جـ) نق^٢ (د) π

الوحدة الرابعة
الهندسة المستوية

(٤-١) المضلـــــعات المتشـــــــابهة

تعمــيم ١

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معاً:

- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.   والعكس صحيح.

تعمــيم ٢

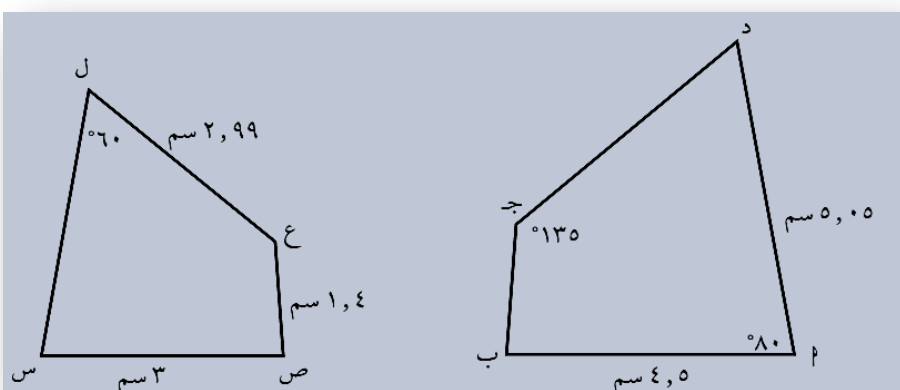
المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

حاول أن تحل (ص ١٣١)

1 في الشكل المقابل، المضلعان أب جـ د ، س ص ع ل مشابهان.

أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة

في كلا المضلعين.



حاول أن تحل (ص ١٣٢)

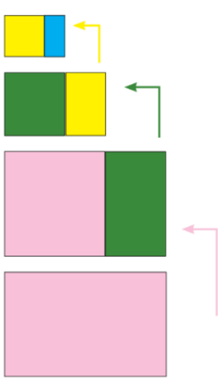
1 المثلثان أب جـ ، د هـ و فيما.

ق(أ̂) = ق(د̂) ، ق(ب̂) = ق(هـ̂) ، ق(جـ̂) = ق(و̂)

أب = ١٢سم، ب جـ = ١٤سم ، أ جـ = ١٦سم ، د هـ = ١٨سم ، هـ و = ٢١سم ،

دو = ٢٤سم هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان؟ وضّح إجابتك. في كلا المضلعين.

المستطيل الذهبي



هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل. والمستطيل الناتج يكون مستطيلاً ذهبياً آخر ويكون مشابهاً للمستطيل الأصلي.

يبين الشكل المقابل نمطاً من المستطيلات الذهبية.

المستطيل الذهبي

في كل مستطيل ذهبي، نسبه طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر

تسمى النسبة الذهبية وتساوي ١: $\frac{١+\sqrt{٥}}{٢}$ أي حوالي ١:١,٦١٨ .

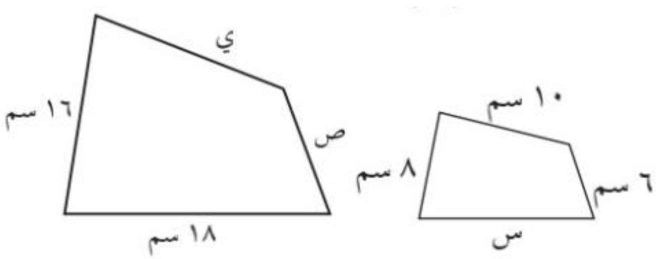
حاول أن تحل (ص ١٣٣)

1 قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها ١٠,٥ سم، ٦,٥ سم.

هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟

تمارين

1 احسب س ، ص ، ي في الحالات التالية علماً بأن المضلعان متشابهان:



(٤-٢) تشـــــــابه المثلثات

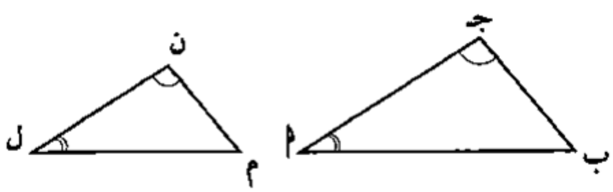
في أي مثلثين متشابهين تكون قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، والنسب بين طولي كل ضلعين متناظرين متساوية؟

النظريات التالية تبين أن توفر أحد الشرطين يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان حيث إن الشرط الآخر سيكون محققاً أيضاً.

نظرية(١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

△ أ ب جـ $ △ ل م ن.



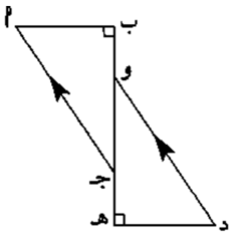
حاول أن تحل (ص ١٣٦)

1 المثلث ا ب جـ قائم الزاوية أ ، ق (ب̂) = ٥٥°

المثلث م ل ح قائم الزاوية م̂، ق (ل̂) = ٣٥°

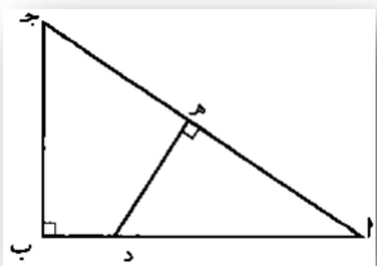
اثبت تشابه المثلثين ا ب جـ ، م ح ل.

2 في الشكل المقابل ، أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ ، د هـ و.



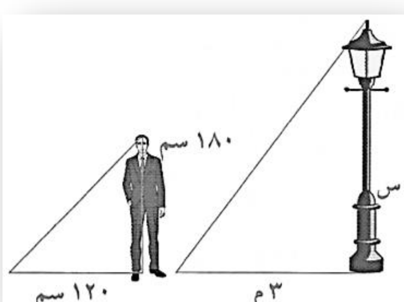
حاول أن تحل (ص ١٣٧)

1 في الشكل القابل، اثبت تشابه المثلثين أ ب جـ ، أ هـ د ،
واكتب عبارة التشابه.



حاول أن تحل ب (ص ١٣٩)

1 عمود طول ظله ٣م في الوقت نفسه الذي يكون فيه
طول ظل محمد ١٢٠ سم. إذا كان طول محمد ١٨٠سم.
فكم سيكون طول العمود؟



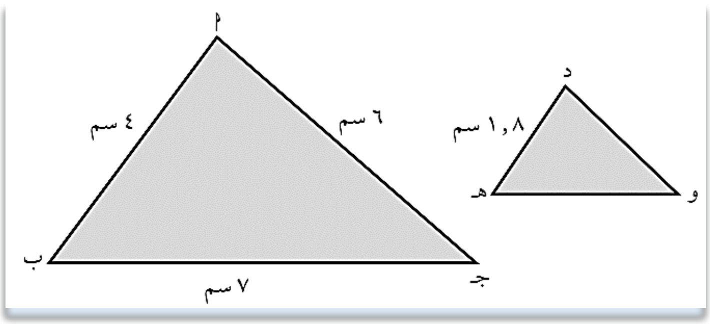
نظرية (٢)

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

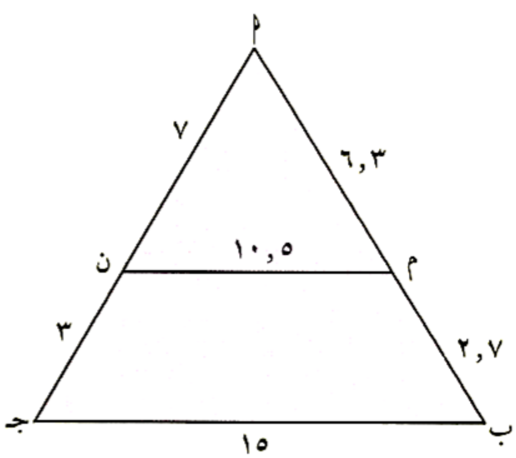
حاول أن تحل ب (ص ١٤٠)

1 في الشكل المقابل المثلثان أ ب جـ ، د هـ و متشابهان.

أوجد طول كل من د و ، و هـ .



مثال ٦ (ص ١٤١)



1 في الشكل المرسوم،

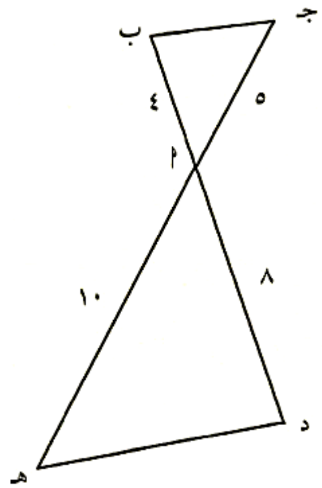
أولاً : اثبت أن: (أ) Δ أ ب جـ ∼ Δ أ م ن

(ب) ب جـ // م ن

ثانياً: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. ماذا تلاحظ ؟

نظرية (٣)

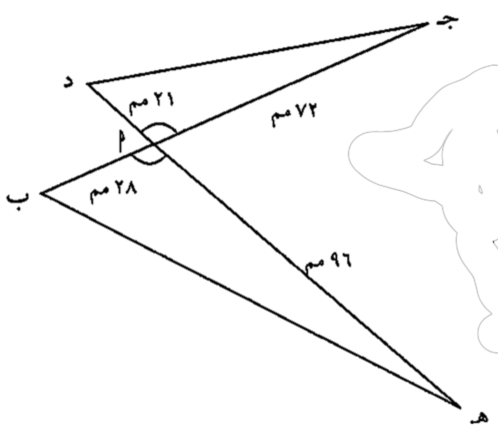
يتشابه المثلثان إن تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.



حاول أن تحل (ص ١٤٣)

1 في الشكل المقابل $\overline{\text{ب د}} \cap \overline{\text{جـ هـ}}$ = { أ }، اثبت أن

المثلثين م ب جـ ، م د هـ متشابهان.



مثال ٩ (ص ١٤٤)

1 في الشكل المقابل ا هـ ب، ا جـ د مثلثان فإذا كان

ا هـ = ٩٦مم، ا ب =٢٨مم ، ا جـ = ٧٢مم، ا د =٢١مم

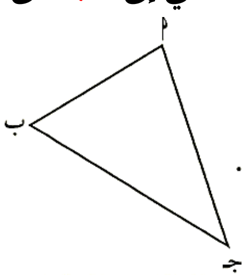
اثبت أن المثلثين أ هـ ب ، أ جـ د متشابهان، وأوجد نسبه التشا

حاول أن تحل (ص ١٤٤)

1 في المثلثين أ ب ج ، ف د ي : أ ب = ٧سم   ب ج = ٦سم   ق (ب) = ٦٣°
د ي = ٥,٤سم ، ق (د) = ٦٣° ، ف د = ٦,٣سم .هل المثلثان أ ب ج ، د ي ف متشابهان؟

حاول أن تحل (ص ١٤٥)

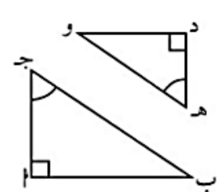
1 ارسم بشكل تقريبي د هـ في المثلث أ ب ج توازي ب ج حيث تنتمي إلى أ ب، هـ تنتمي إلى أ ج على أن تكون نسبة التشابه بين المثلثين أ د هـ ، أ ب ج تساوي ٢/٣.



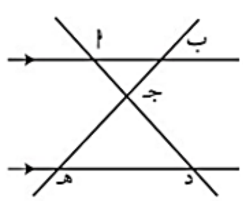
تمارين ص ٨٧-٨٨-٨٩

1 بيّن سبب تشابه كل مثلثين، واكتب النظرية التي استخدمتها.

(أ)

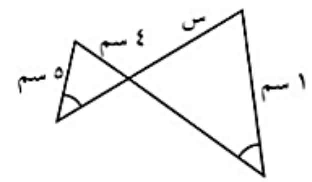


(ب)

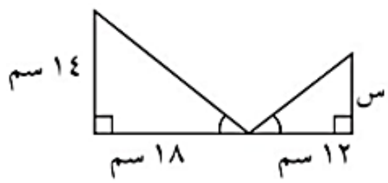


2 استخدم التشابه لإيجاد قيمة س.

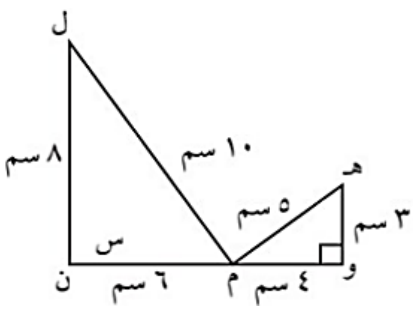
(أ)



(ب)



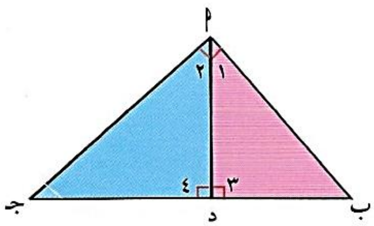
3 اثبت أن المثلثين متشابهان، ثم أوجد قيمة س فيما يلي:



(٤-٣) التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

نظرية(١)

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتير في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشاه المثلث الأصلي.



المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أ ، أ د ⊥ ب جـ

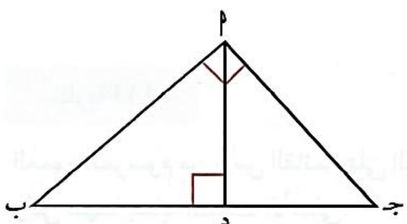
المطلوب: 1 إثبات تشابه المثلثين أ ب د ، جـ أ د

2 إثبات تشابه المثلثين أ ب د ، جـ ب أ

3 إثبات تشابه المثلثين أ جـ د ، ب جـ أ

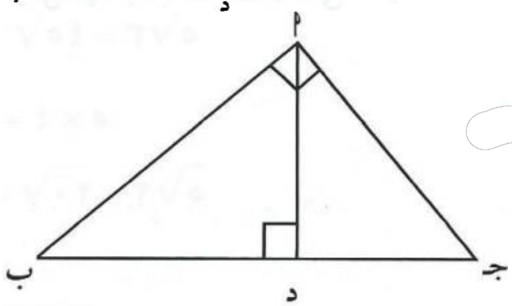
نتيجة (١)

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتير في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتير بهذا العمود.



(أ د)^{٢} = ب د X جـ د

نتيجة (١)



إذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاوية أ ، أد ⊥ جـ ب

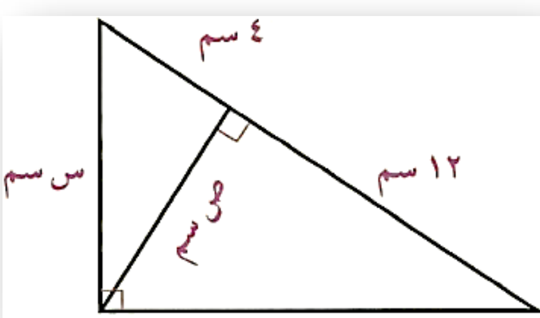
1 (أب)^{٢} = ب د X ب ج

2 (أ جـ)^{٢} = جـ د X جـ ب

3 أ ب X أ جـ = أ د X ب جـ

حاول أن تحل (ص ١٥٠)

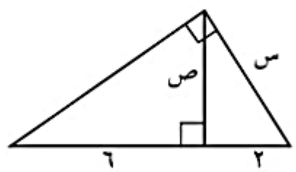
1 أوجد من الشكل المرسوم س ، ص في أبسط صورة.



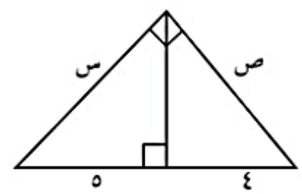
تمارين ص ٩٣-٩٤

1 أوجد قيمة كل من س ، ص في كل مما يلي:

(ب)

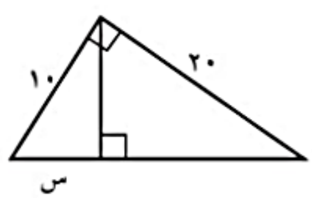


(أ)

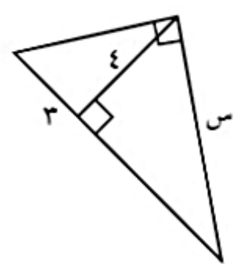


2 أوجد قيمة س في كل مما يلي:

(ب)

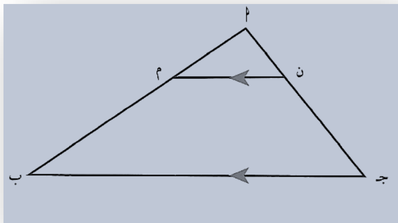


(أ)



(٤-٤) التناسبات والمثلثات المتشابهة

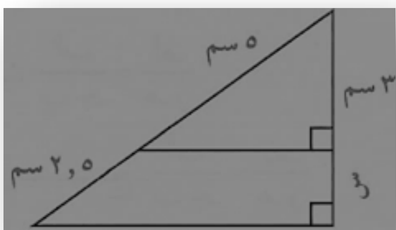
نظرية (١) نظرية المستقيم الموازي



إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضعليه الآخرين فإنه يقسم هذين الضعلين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

حاول أن تحل (ص ١٥٣)

1 في الشكل المقابل، استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد س.

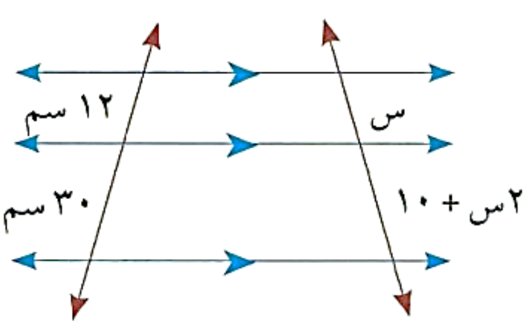


نظرية (٢) نظرية طاليس

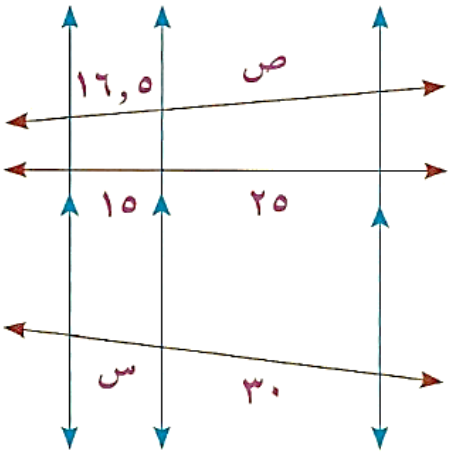
إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القطاع الآخر.

مثال (ص ١٥٤)

1 في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



حاول أن تحل (ص ١٥٤)



1 أوجد في الشكل المقابل، س ، ص في أبسط صورة.

حاول أن تحل (ص ١٥٧)

نظرة (٣) نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

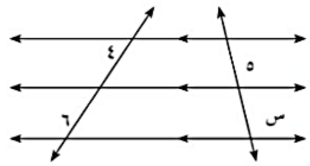
حاول أن تحل (ص ١٥٨)

1 **ا ب جـ مثلث حيث ا ب = ٦سم، ا جـ = ٨سم، ثم رسم ا د منصف ب ا جـ ويقطع ب جـ في د. إذا كان ب د = ٣سم، أوجد جـ د.**

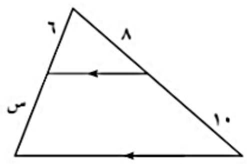
تمارين ص ٩٧-٩٨

1 أوجد قيمة س في كل مما يلي:

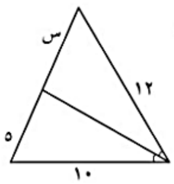
(أ)



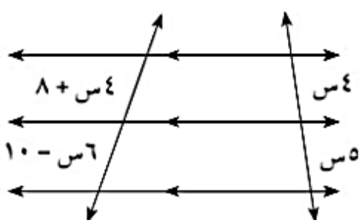
(ب)



(جـ)

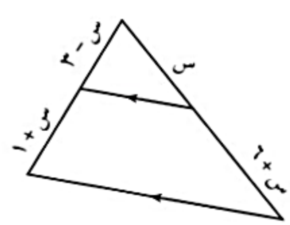


2 في الشكل أوجد قيمة س.

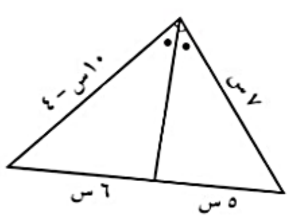


3 أوجد قيمة س فيما يلي:

(أ)

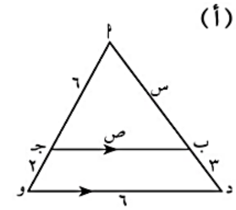


(ب)

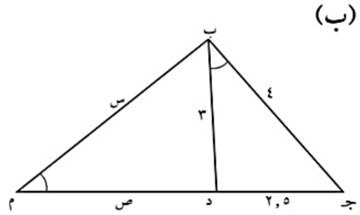


4 أوجد قيمة س ، ص في كل مما يلي:

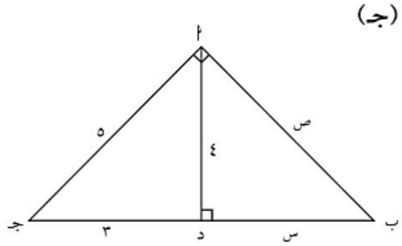
(أ)



(ب)

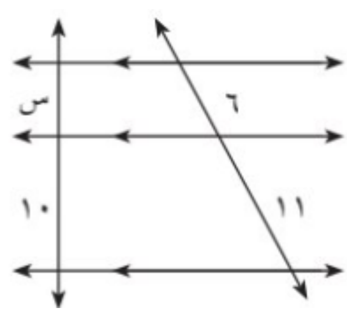


(جـ)

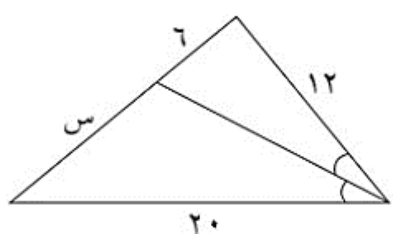


5 أوجد س في كل مما يلي:

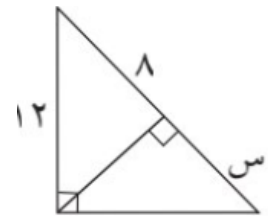
أ



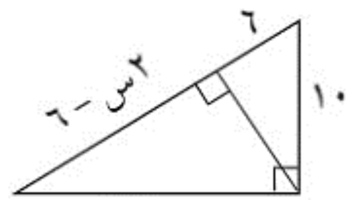
ب



ﻫ



ى



الوحدة الخامسة
المتتاليات (المتتابعات)

(٥-١) الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)

تعريف

المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها مرتبة على الصورة {١، ٢، ٣، ٤، ...، م} ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح

المتتالية المنتهية والمتتالية غير المنتهية

حاول أن تحل (ص ١٧٢)

1 لتكن الدالة ت : {١، ٢، ٣، ٤} ← ح حيث ت (ن) = ن^{٣}+١. بيّن في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية ثم أوجد حدودها.

2 لتكن الدالة ص$_{+}$ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{ن}{ن+١}$. بيّن في ما إذا كانت ت متتالية، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

المتتالية غير المنتهية يكون مجالها ص

(٥-٢) المتتــاليـة الحســــــابية

تعريف

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عدداً ثابتاً. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالمز ء. وعلى ذلك $ح_{ن+١} - ح_ن = ء$ أو $ح_{ن+١} = ح_ن + ء$.

حاول أن تحل (ص ١٧٧)

1 هل المتتاليتان التاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك، فأوجد أساس كل منهما.

(أ) المتتالية (٢، ٥، ٧، ١٢)

(ب) المتتالية (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩)

حاول أن تحل (ص ١٧٨)

1 إذا كان $ح_١ = ٤$، $ء = -٣$ في متتالية حسابية، فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

بصفة عامة

ح ن = ح ١ +(ن -١) ء لكل ن ∈ ص+

إذا كان الحد المعروف ح ك، فإن ح ك = ح ١ + (ك-١) ء : ك ∈ ص+

ومنه يكون ح ن – ح ك = (ن – ك) ء أي أن ح ن = ح ك + (ن – ك) ء

وتكون الصورة العامة للمتتالية الحاسبية: (ح ١، ح ١+ ء، ح ١ + ٢ ء، ...، ح ١ + (ن - ١) ء، ...)

لاحظ أن ء= $\frac{ح_ن - ح_ك}{ن - ك}$: ن ≠ ك

حاول أن تحل (ص ١٧٩)

1 في المتتالية الحسابية ح ١=٤، ء=٣ . أوجد ح ١٢.

مثال ٥ (ص ١٨٠)

1 في المتتالية (ح ن) حيث ح ن = ٧ن -٣ لكل ن ∈ ص+ ، اثبت أن المتتالية حسابية.

حاول أن تحل (ص ١٨٠)

1 في المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٣ن + ٥$: $ن \in ص_+$ ، اثبت أن المتتالية حسابية.

مثال ٦ (ص ١٨٠)

1 إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية ٩ والحد الثامن يساوي ١٥، فأوجد أساس المتتالية.

حاول أن تحل (ص ١٨٠)

1 إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد السادي يساوي -٣، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتفياً بالحدود الأربعة الأولى منها.

الأوساط الحسابية

$ب = \frac{أ+جـ}{٢}$

حاول أن تحل (ص ١٨١)

1 أوجد قيمة ص من المتتالية الحسابية (٤٣، ص ، ٥٧).

بصورة عامة

إذا كانت (أ، ب، جـ، د، ٠٠٠، ف، ص) متتالية حسابية فإن ب ، ج ، د، ٠٠٠، ف تسمى أوساطاً حسابية للعددين أ، ص. وتسمى عملية إيجاد الأوساط الحسابية إدخال أوساط حسابية بين العددين أ، ص.

حاول أن تحل (ص ١٨٢)

1 (أ) أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين -٩، ٣.

(ب) أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١٣، ١.

مجموع ن حدّا الأولى من حدود متتالية حسابية

مجموع ن حدا الأولى من حدود متتالية حسابية (حن) يعطي بالقاعدة.

جـ = $\frac{ن}{٢}$ (ح١+حن)	أو	جـن = $\frac{ن}{٢}$ [ح١+(ن-١) ء]

حيث حن هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول ح١

القانون (١): يعطي مجموع حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

القانون (٢): يعطي مجموع ن حدا الأولى من حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول و الأساس ء

حاول أن تحل (ص ١٨٣)

1 أوجد مجموعة الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحســابية التي حــدها الأول -١٢ وحــدها العاشر ٢٤.

حاول أن تحل (ص ١٨٤)

1 (أ) متتالية حسابية حدها الأول -٧ وأساسها ٤. أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حداً منها.

ب أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ٠٠٠، ٩٥).

تمارين ص ١٠٥-١٠٦

2 في كل متتالية حسابية أوجد الحد الثاني والثلاثون.

أ (٣٤، ٣٧، ٤٠ ، ٤٣، ٠٠٠)

ب (٢١٣، ٢٠١، ١٨٩، ١٧٧، ٠٠٠)

3 أوجد س في كل متتالية حسابية.

أ (-١٦، س، ١، ٠٠٠)

ب ($\frac{١٣}{٢}$، س، $\frac{٥١}{٢}$ ، ٠٠٠)

4 أوجد الوسط الحسابي: $ح_{ن-١} = ٧$ ، $ح_{ن+١} = ١$

5 أوجد الحد السابع عشر من المتتالية الحسابية.

أ) ($ح_{١٦} = ١٨$، $ء = ٥$)　　ب) ($ح_{١٨} = ١٨$ ، $ء = -٤$)

6 في كل متتالية حسابية أوجد الحد الأول $ح_١$ و الأساس ء.

أ) $ح_٣ = ٥$، $ح_٥ = ١١$ ، . . .　　ب) $ح_{١٠} = ١٧$ ، $ح_{١٤} = ٣٤$ ، . . .

7 في متتالية حسابية $جـ_٨ = ٤٤٠$ ، و الأساس $ء = ٦$ أوجد $ح_١$.

8 أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ...).

9 أوجد الحد الأربعون ح$_{٤٠}$ في المتتالية الحسابية حيث ح$_{١}$=٥، جـ$_{٤٠}$ =٦٠٨٠.ثم أوجد ح$_{٣٠}$.

10 أوجد الحد الناقص في كل متتالية حسابية.

أ (١٠١، ___ ، -١٥٥) ب (١٤، ___ ، ٢٨)

11 أوجد الوسط الحسابي فيما يلي:

أ ح$_{ن-١}$ = ١٠٠ ، ح$_{ن+١}$ = ١٤٠ ب ح$_{ن-١}$= ر ، ح$_{ن+١}$ = ر+ ز

12 أوجد الحد السابع عشر من المتتالية: $ح_{١٨}$ =١٨ ، ء = -١١

13 في متتالية حسابية $جـ_{٣}$ = ٢٤٠ ، الأساس ء = -٢ ، أوجد $ح_{١}$.

12 أوجد مجموع العشرين حداً الأولى من المتتالية الحسابية (٢٠، ١٦، ١٢، ٠٠٠).

14 في المتتالية الحسابية (٤، ١، -٢، ٠٠٠) رتبة الحد الذي قيمته -٢٣ هي.

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

15 إذا أدخلنا ثلاثة أوساط حسابية بين العددين ٥، ٢١ فإن هذه الأوساط هي:

(أ) ١٠ ، ١٤ ، ١٨ (ب) ٩ ، ١٣ ، ١٧

(جـ) ٨ ، ١٢ ، ١٦ (د) ٩ ، ١٤ ، ١٩

(٣-٥) المتتــالية الهندسية

تعريف

المتتالية الهندسية : هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عدداً حقيقياً ثابتاً غير صفري.

فيكون $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = ر$ حيث $ح_ن \neq ٠$

لكل ن ∈ ص+ ، ر عدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية .

مثال ١ (ص ١٨٧)

1 لتكن ($ح_ن$) متتالية حيث $ح_ن = (٣)^{ن}$

(أ) اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية ($ح_ن$).

الحد النوني للمتتالية الهندسية

$ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$

مثال ٢ (ص ١٨٨)

1 اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.

حاول أن تحل (ص ١٨٨)

2 اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ وأساسها -٣.

3 متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{١}{٣}$. اكتب المتتالية مكتفياً بالحدود الخمسة الأولى منها.

الأوساط الهندسية

ب = ± $\sqrt{أجـ}$

حاول أن تحل (ص ١٩٠)

1 أوجد وسطاً هندسياً بين العددين في كل ما يلي:

(أ) -٣ ، -٧٢ (ب) ٢٠ ، ٨٠ (جـ) ٣ ، ١٨,٧٥.

بصورة عاملة

في المتتالية الهندسية (ا ، ب ، جـ ، د ، ٠٠٠ ، ك ، ل). تسمى ب ، جـ ، د ، ٠٠٠ ، ك أوساطاً هندسية للعددين الحقيقيين ا ، ل.

وتسمى عملية إيجاد ب، جـ ، د، ٠٠٠، ك عملية إدخال أوساط هندسية بين العددين ا، ل.

حاول أن تحل (ص ١٩١)

1 أدخل ثمانية أوساط هندسية بين ٢ ، ١٠٢٤ .

مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية

إذا كانت (حن) متتالية هندسية، جـن = $ح_1 + ح_2 + ح_3 + \cdots + ح_ن$ هو مجموع ن حداً الأولى، فإن:

قانون

1. جـن = $ح_1 \times \frac{ر^{ن} - 1}{ر - 1}$ = $ح_1 \times \frac{1 - ر^{ن}}{1 - ر}$ ، $ر \neq 1$
2. إذا كانت $ر = 1$ فإن جـن = ن $ح_1$

تمارين ص ١١٠-١١١

1. هل المتتاليات الآتية هندسية؟ إذا كانت كذلك أوجد الأساس.

   (أ) (١، ٢، ٤ ، ٨ ، ١٦)

   (ب) (١، -١، ١، -١ ، ١)

3. في المتتالية الهندسية (٣، ١٢ ، ٤٨، ١٩٢، ٠٠) أوجد.

   (أ) الحد الخامس.

   (ب) الحد النوني.

4 أوجد الحد العاشر في كل متتالية هندسية.

(أ) $ح_١ = ٨$ ، $ر = \frac{١}{٢}$

(ب) $ح_٩ = -٥$ ، $ر = -\frac{١}{٢}$

5 أوجد مجموع حدود المتتاليات الهندسية حيث:

(أ) $ح_١ = ٣$ ، $ر = \frac{١}{٢}$ عدد الحدود $= ٥$

(ب) $ح_١ = ٥٠$ ، $ر = ٠,٨$ عدد الحدود $= ٩$

6 أجب بصح أو خطأ.

في المتتالية الهندسية الموجبة الحدود (١٢، س ، ٣، ٠٠٠) تكون قيمة س هي ٦.

7 لديك المتتالية الهندسية (٣، ١٢، ٤٨، ١٩٢، ٠٠٠) أوجد.

(أ) الحد السابع . (ب) الحد السابع عشر

8 أوجد مجموع حدود المتتاليات الهندسية حيث:

(أ) ح١ = ٤ ، ر = $\frac{١}{٢}$ عدد الحدود =٦ (ب) ح١ = ٢٠ ، ر= ٠,٤

عدد الحدود =٧

9 اكتب الحدود الخمسة الأولى في المتتالية الهندسية:

(أ) $ح_{١} = ٢$ ، $ر = ٢\frac{١}{٢}$ (ب) $ح_{١٠٠} = -١٠٠٠$ ، $ر = \frac{١}{٥}$

10 اكتب الحدود الخمسة الأولى في المتتالية الهندسية:

(أ) $ح_{١} = ٣$ ، $ء = ٧$ (ب) $ح_{١} = ١٩$ ، $ء = -٤$

11 أمامك مجموع لحدود متتالية حسابية أو هندسية. أوجد المجموع.

(أ) $٢ + ٧ + ١٢ + \cdots + ح_{٨}$ (ب) $٥٠٠ + ١٠٠٠ + ٢٠٠ + \cdots + ح_{١٥}$

12 أدخل خمسة أوساط هندسية بين العددين $\frac{١}{٣}$ ، ٢٤٣.

13 أدخل ستة أوساط هندسية بين العددين $-\frac{١}{٢}$ ، -٦٤.