منصة سما التعليمية
المادة : الرياضيات
الصف ١١ علمي

تدرب مع سماً

SAMA

الصف 11 علمي

العلاقة والدالة : عندما يكون كل عنصر في المجال مرتبطاً بعنصر واحد فقط من المجال المقابل ، فإن العلاقة تسمى دالة والدالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية .

مثال توضيحي (1) صـ 44 : في المخططات السهمية التالية علاقات من : $X \to Y$

❸ بيّن أي من العلاقات يمثل دالة حقيقية وأيها لا يمثل دالة حقيقية مع ذكر السبب .

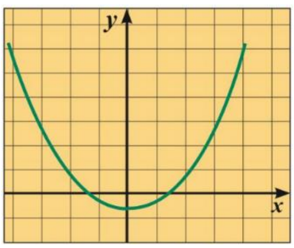
إذا كانت العلاقة ممثلة بيانياً في المستوى الإحداثي ، نستخدم في هذه الحالة اختبار المستقيم الرأسي (العمودي) لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا .

اختبار المستقيم الرأسي :

إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر ، فإن هذه العلاقة تكون دالة .

حاول أن تحل (1) صـ 47: استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل دالة أم لا :

ⓐ

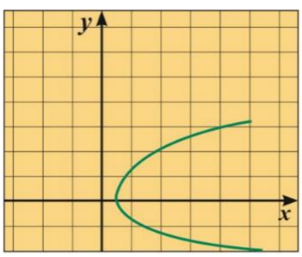


....

....

....

ⓑ



....

....

تدرب مع سما

قواعد لإيجاد مجال الدالة :

من الدروس المهمة لأساسيات الرياضيات

1) مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2) مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام .

3) مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

4) مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$

5) مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي ، هو مجال الدالة $g(x)$

6) مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين أي أن : مجال f = مجال g $\cap$ مجال h

7) مجال الدالة $f(x) = g(x) . h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين أي أن : مجال f = مجال g $\cap$ مجال h

8) مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين ماعدا أصفار المقام أي أن مجال f = (مجال g $\cap$ مجال h) / مجموعة أصفار المقام

حاول أن تحل (2) صـ 49: أوجد مجال كل دالة مما يلي :

$$a)\ f_1(x) = \frac{2x+5}{x-4}$$

b) $f_2(x) = x^3 - 4x^2 - 4 + \sqrt{x-9}$

c) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

d) $f_4(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-5x}{x}}$

في التمارين (13 – 7) : حدد مجال كل من الدوال التالية :

$$(7)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 - 1$$

$$(8)\ g(x) = \sqrt{3x - 7} + 2$$

$(9)\ t(x) = \dfrac{\sqrt{-2x} + 3}{x - 1}$	$(10)\ h(x) = \dfrac{3x - 1}{5 - 2x}$
	$(11)\ u(x) = \sqrt[3]{7 - 5x}$

(12) $v(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{3+x}}$

(13) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$

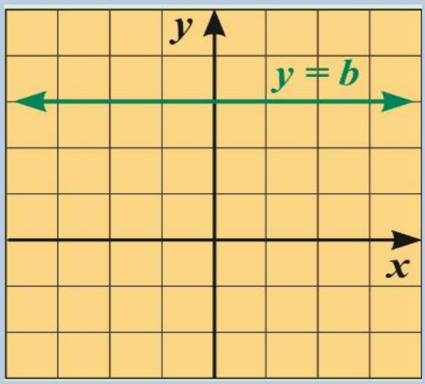
2 الدوال التربيعية ونمذجتها - البند (2 - 2)

تعريف الدالة الخطية : الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الصورة العامة للدالة الخطية هي :

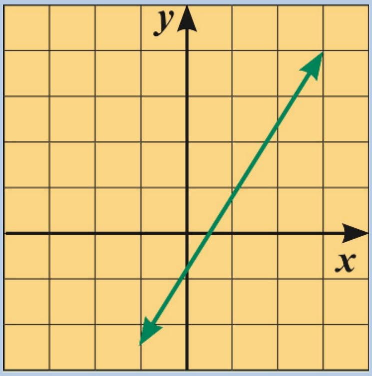
$$f(x) = a\,x + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad a \neq 0$$

أو $y = a\,x + b$

تمثل الدالة الخطية بيانياً بخط مستقيم



$a = 0$



$a \neq 0$

تعريف الدالة التربيعية : الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الصورة العامة للدالة التربيعية هي :

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad , \quad a \neq 0$$

تمثل الدالة التربيعية بيانيا بمنحنى متماثل حول المحور الرأسي الذي يمر برأس المنحنى

ويسمى شكل المنحنى قطعاً مكافئاً والاحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $x = \frac{-b}{2a}$ وهي

معادلة المستقيم الرأسي و يسمى محور التماثل

مثال (1) صـ 52 : حدد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية .

$f(x) = (3x - 4)(x + 2)$

حاول أن تحل (1) صـ 52 : حدد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية .

a) $f(x) = 2x(x - 3)$

b) $f(x) = (x - 2)(2x + 1)$

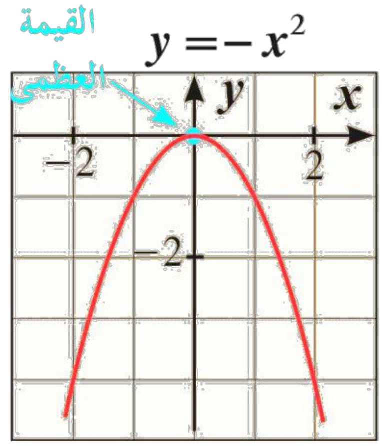
c) $f(x) = (2x + 3)^2 - 4x^2 - 7x$

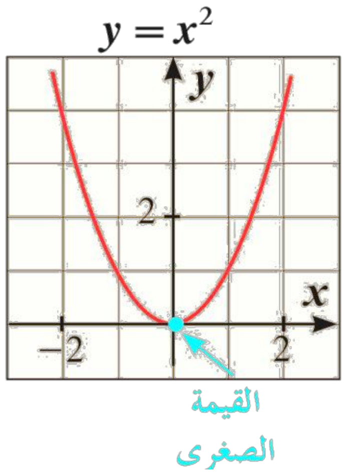
d) $f(x) = 3(x^2 - 4x) - 3x^2 + 4$

3 الدوال التربيعية والقطوع المكافئة -البند (3 -2)

تعلمنا فيما سبق أن بيان الدالة التربيعية يكون على شكل منحنى يسمى قطعاً ً مكافئاً ً

رأس القطع المكافئ : هو أعلى أو أدنى نقطة في القطع المكافئ الذي يمثل الدالة التربيعية بيانياً ً، فنقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أكبر قيمة وتسمى قيمة عظمى وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع للأسفل أو نقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أصغر قيمة وتسمى قيمة صغرى وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع للأعلى .





محور التماثل (محور التناظر) : يقسم القطع المكافئ إلى جزئين متطابقين (كل جزء هو صورة للآخر بالانعكاس في المحور) .

ملاحظة : معادلة الدالة التي تمثل قطعاً ً مكافئاً ً رأسه (0 , 0) هي : $y = ax^2$

لإيجاد قيمة a يكفي أن يكون لدينا نقطة تقع على المنحني نعوض إحداثياتها بالمعادلة نحصل على قيمة a .

إذا كانت $a > 0$ تكون فتحة القطع للأعلى ، وإذا كانت $a < 0$ تكون فتحة القطع للأسفل معادلة محور تماثل هذا القطع المكافئ هي : $x = 0$

حاول أن تحل (1) صـ 57 : كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل .

أكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ وأذكر ما إذا كان بيانه مفتوحاً إلى أعلى أم إلى أسفل .

$a)\quad E(4,2)$

الحل:

$b)\quad D(1,-5)$

الحل:

معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه $(h\,,k)$: المعادلة على الصورة :

$$y = a(x-h)^2 + k \quad , \quad a \neq 0 \quad , \quad h\,,k \in \mathbb{R}$$

هي معادلة قطع مكافئ رأسه النقطة $(h\,,k)$ والمستقيم $x = h$ محور التماثل

إذا كانت $a > 0$ تكون فتحة القطع للأعلى .

إذا كانت $a < 0$ تكون فتحة القطع للأسفل .

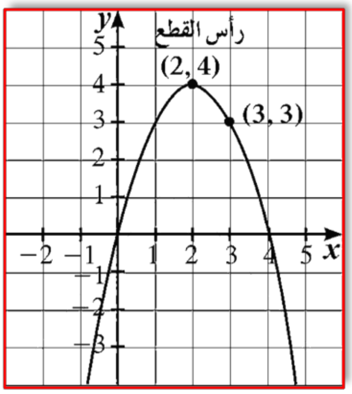
ملاحظة : نلاحظ أنه كلما زاد قيمة معامل حد الدرجة الثانية قل اتساع القطع المكافئ

* إذا كان $|\,a\,| < 1$ ، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة : $y = x^2$

* إذا كان $|\,a\,| > 1$ ، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة : $y = x^2$

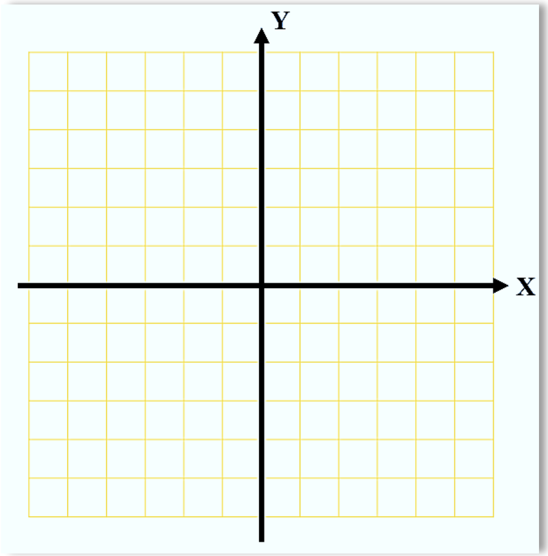
حاول أن تحل (3) صـ 60 : أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل .

الحل



حاول أن تحل (4) صـ 61 : ارسم منحنى الدالة $y = (x+3)^2 + 1$.

الحل:



4 المعكوسات ودوال الجذر التربيعي -البند (5 - 1)

اذا أخذنا أي عدد ينتمي لمجال الدالة $f(x) = 2x - 8$ وليكن 6 فإن

$$f(6) = 2(6) - 8 = 4$$

اذا أخذنا أي عدد ينتمي لمجال الدالة $g(x) = \frac{x+8}{2}$ وليكن 4 فإن

$$g(4) = \frac{4+8}{2} = 6$$

نلاحظ أن:

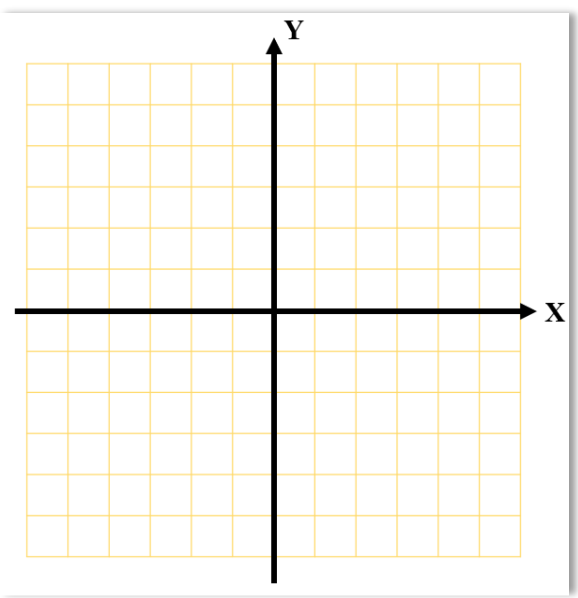
1) نلاحظ عناصر مدى الدالة $f(x)$ هي مجال الدالة $g(x)$ والعكس عناصر مدى الدالة $g(x)$ هي مجال الدالة $f(x)$

2) الدالتان $g(x)$, $f(x)$ كلا منهما تعكس عملية الدالة الأخرى لذلك تسمى f معكوس g أو g معكوس f

استنتاج : إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي لبيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة ولكي نرسم معكوس الدالة بيانيا نعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة .

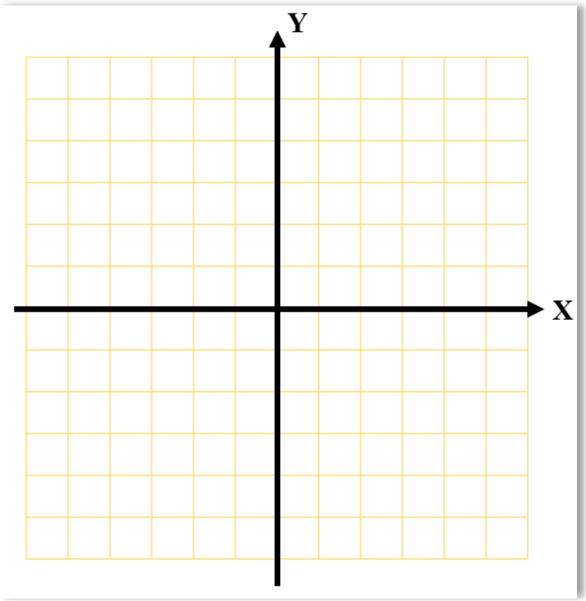
مثال (1) صـ 71: ارسم الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ ومعكوسها ، ثم اكتب معادلة المعكوس

الحل



حاول أن تحل (1) ص 71: ارسم الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها ، ثم اكتب معادلة المعكوس

الحل



$(b)\ \mathbf{y = 2(x + 1) - 3}$

الحل:

حاول أن تحل (3) صـ 73: أوجد معكوس الدالة $f(x) = (x+3)^2 - 4$.

الحل:

حاول أن تحل (2) صـ 72: أوجد معكوس الدالة :

(a) $y = \dfrac{2x-1}{3}$

الحل:

(b) $y = 2(x+1) - 3$

حاول أن تحل (3) صـ 73: أوجد معكوس الدالة $f(x) = (x+3)^2 - 4$.

الحل:

دوال الجذر التربيعي :

لرسم بيان الدالة $y = \sqrt{x+h} + k$ عن طريق دالة المرجع : نتبع الخطوات

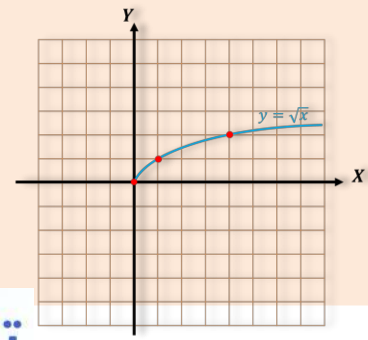
1 . **نعين دالة المرجع** .

* إذا كانت الدالة $y = \sqrt{x+h} + k$ تكون دالة المرجع هي : $y = \sqrt{x}$

* إذا كانت الدالة $y = -\sqrt{x+h} + k$ تكون دالة المرجع هي : $y = -\sqrt{x}$

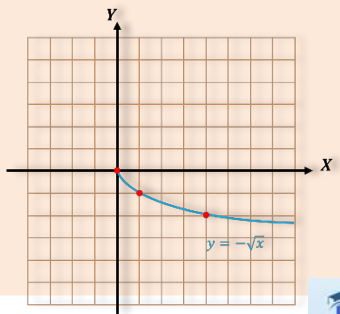
دالة المرجع $y = \sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2



دالة المرجع $y = -\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	-1	-2



مجالها هو $[\,0\,,+\infty\,)$ (قيم x)

مدى الدالة هو $[\,0\,,+\infty\,)$ (قيم y)

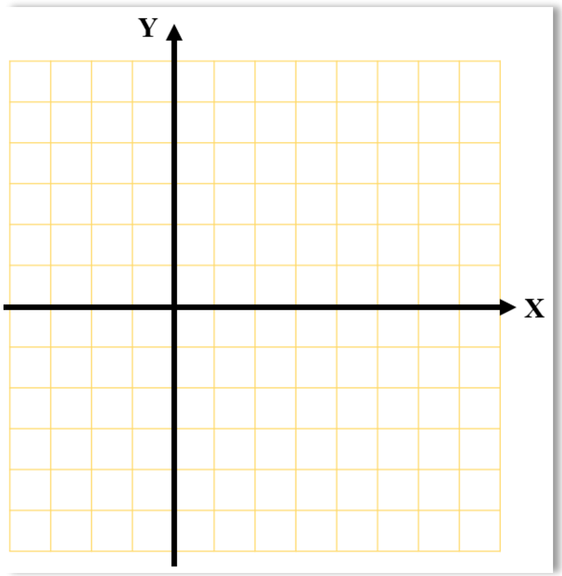
مجالها هو $[\,0\,,+\infty\,)$ (قيم x)

مدى الدالة هو $(-\infty\,,0]$ (قيم y)

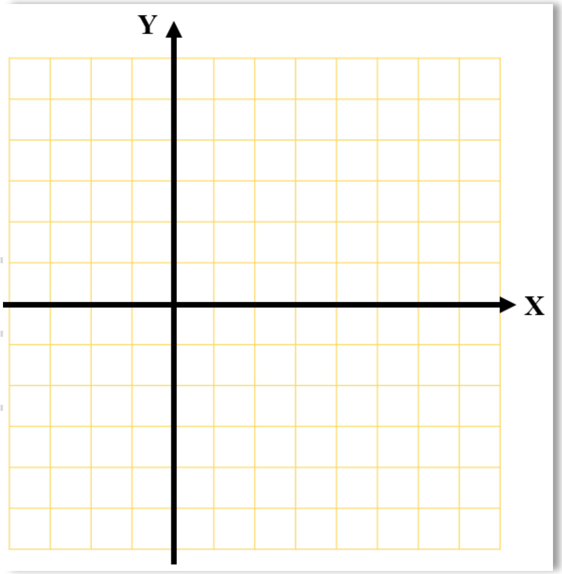
مثال :

- **بيان الدالة $y=\sqrt{x-1}$ ينتج من ازاحة بيان الدالة $y=\sqrt{x}$ وحدة واحدة جهة اليمين .**
- **بيان الدالة $y=\sqrt{x-1}+4$ ينتج من ازاحة بيان الدالة $y=\sqrt{x}$ وحدة جهة اليمين وأربع وحدات للأعلى**

مثال (4) صـ 73: ارسم بيانياً : $y=\sqrt{x-4}-2$. عين المجال والمدى للدالة



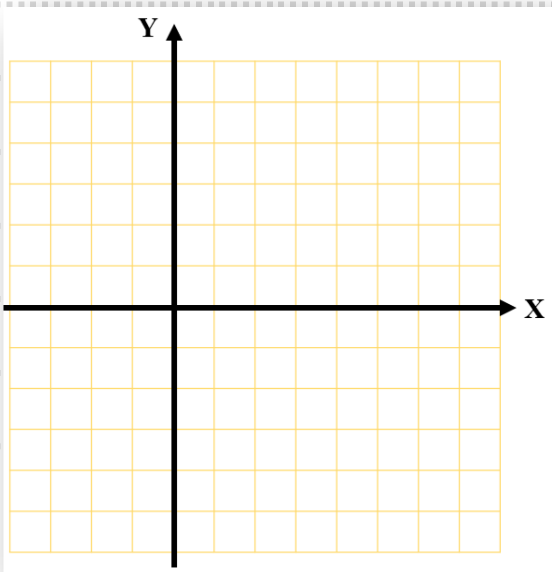
حاول أن تحل (4) صـ 74: (a) ارسم بيانياً : $y = \sqrt{x-2} + 1$. عين المجال والمدى للدالة



صـ 30 :في التمارين (11 – 14) : ارسم كل دالة جذر تربيعي . ثم اذكر المجال والمدى :

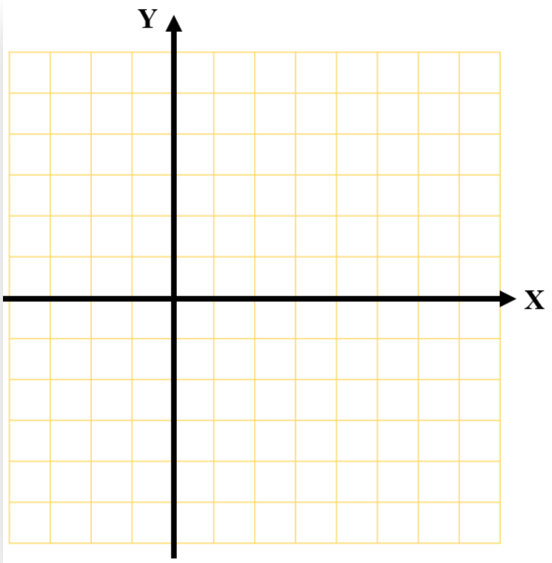
$(11)\quad y = -\sqrt{x-1}$

الحل:



(12) $y = -\sqrt{x} + 2$

الحل:



(b) : إذا تم إزاحة بيان الدالة $y = \sqrt{x}$ ، 5 وحدات يميناً ، 2 وحدة إلى الأسفل .

أكتب معادلة الدالة الناتجة عن الإزاحة .

الحل:

حل المتباينات - البند (6 - 1)

حاول أن تحل (1) صـ 76: أوجد مجموعة حل المتباينة : $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

الحل:

حاول أن تحل (2) صـ 77: أوجد مجموعة حل المتباينة : $-2x^2 + 5x - 3 > 0$.

الحل:

حاول أن تحل (4) صـ 80: أوجد مجال كل دالة مما يلي :

$\boxed{1}\ h(x) = \sqrt{x^2 - x}$

الحل:

$\boxed{2}\ q(x) = \sqrt{9 - x^2}$

الحل:

حاول أن تحل (5) صـ 81: أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$.

الحل:

حاول أن تحل (6) صـ 81: أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{x^2+5x}{x+3} > -2$.

الحل:

حاول أن تحل (7) صـ 83: أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{x^2-49}{x+7} \le 0$.

الحل:

في التمارين (3 – 9) حل المتباينات التالية :

(3) $\frac{x-1}{x^2-4} < 0$

الحل:

(4) $\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 0$