الصف 11 علمي

الوحدة الأولى
الأعداد الحقيقية

البند (1 - 1) جذور والتعبيرات الجذرية

تدرب مع سما

تذكرة بمجموعات الأعداد :

1	مجموعة الأعداد الطبيعية ((الكلية)) $\mathbb{N}$	3	مجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$
2	مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$	4	مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

$\forall\ m,n \in Z\ ,\ \ \forall\ a,b \in R\ ,\ \ (a,b \neq 0)$	
1. $(a\,.\,b)^m = a^m\,.\,b^m$	4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ \ ,a \neq 0$
2. $(\dfrac{a}{b})^m = \dfrac{a^m}{b^m}\ \ ,b \neq 0$	5. $(a^m)^n = a^{m.n}$
3. $a^m\,.\,a^n = a^{m+n}$	6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\ \ ,a \neq 0$

تذكرة بقوانين الأسس:

الجذور التربيعية : لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب و الآخر سالب

أي اذا كان $A^2 = x$ فإن $A = \pm\sqrt{x}\ ,\ x > 0$

فمثلاً : $(\pm 5)^2 = 25$ فإن الجذران التربيعيان للعدد 25 هما ± 5

تذكر أن : $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

الجذور التكعيبية :

لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد .

أي اذا كان $A^3 = x$ فإن $A = \sqrt[3]{x}$

تدرب مع سما

فمثلاً :
$$5 = \sqrt[3]{125} \Rightarrow 5^3 = 125$$
$$-5 = \sqrt[3]{-125} \Rightarrow (-5)^3 = -125$$

تذكر أن : $\sqrt[3]{x^3} = x$

حاول أن تحل (1) صـ 13: بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد الجذر التكعيبي لكلٍ من الأعداد

$b)\ 64$	$a)\ -27$
$d)\ \frac{343}{216}$	$c)\ -0.008$

حاول أن تحل (2) صـ 14: بسط كلا" من التعبيرات الجذرية التالية حيث x , y عددان حقيقيان :

جمع وطرح التعبيرات الجذرية :

لجمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب أن تكون متشابهة

$c)\ \sqrt{x^8y^6}$	$b)\ \sqrt[3]{-27x^6} + 3x^2$	$a)\ \sqrt{9x^2y^4}$

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه لذلك لجمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب وضعها في أبسط صورة ليتسنى لنا معرف فيما إذا كانت متشابهة أم لا .

حاول أن تحل (4) صـ 16: أوجد الناتج في ابسط صورة

$a)\ 4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128}$

$b)\ 2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

تدرب مع سماً

$c)\ \sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$

$d)\ \sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية :

خواص الجذور التكعيبية : $x, y \in R\ \forall$		$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ خواص الجذور التربيعية :	
$\sqrt[3]{x^3} = x$	$\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$	$(\sqrt{x})^2 = x$
	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, y \neq 0$	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, y \neq 0$

حاول أن تحل (5) صـ 18 بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية :

$a)\ \sqrt{50\, x^4}$ $\qquad$ $b)\ \sqrt[3]{18\, x^3}$

حاول أن تحل (6) صـ 18 : بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية :

$a)\ 3\sqrt{7\, x^3} \times 2\sqrt{x^3 y^2}, x \geq 0$ $\qquad$ $b)\ 4\sqrt[3]{x^4\, y} \times 3\sqrt[3]{x^2\, y}$

حاول أن تحل (7) صـ 19 : أوجد ناتج كل من التعبيرات الجذرية التالية :

$a)\ \dfrac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$ $\qquad b)\ \dfrac{\sqrt{12\,x^4}}{\sqrt{3x}}\ , x \geq 0$ $\qquad c)\ \dfrac{\sqrt[3]{128\,x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^2}}\ , x \neq 0$

الحل:

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذر : إذا كان x, y تعبيرين جذريين يمثلان أعداد غير نسبية وكان ناتج ضربهما عدد نسبي فإن x, y مترافقان.لذلك لتبسيط كسر مقامه يتضمن جذر لابد من ضرب المقام بمرافقه لإزالة الجذر من المقام إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين فإن :

- مرافق $\sqrt{a}$ هو $\sqrt{a}$
- مرافق $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ هو $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
- مرافق $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ هو $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$
- مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$
- مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$
- مرافق $\sqrt[3]{a^2}$ هو $\sqrt[3]{a}$

حاول أن تحل (8) صـ 21 : أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية في أبسط صورة :

$a)\ \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$b)\ \dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$c)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

الكراسة (7) أوجد قيمة التعبير: x^2-6 إذا كان $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

الصورة الأسية	الصور الجذرية
$25^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{27}$
$64^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$

2 الأسس النسبية البند (2 - 1)

حاول أن تحل (1) صـ 23 : بسط كل من الأعداد التالية مستخدما الصورة الجذرية :

$a) 64^{\frac{1}{3}} =$

$b) \left(2^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}\right) =$

$c) \left(8^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}\right) =$

حاول أن تحل (2) صـ 23 : اكتب العدد $64^{\frac{4}{3}}$ بالصورة الجذرية .

ملاحظة :
* إذا كان $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}$ فإن $a = b^n \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$
* إذا كان $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2, m \in \mathbb{Z}, \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ فإن :
$\boxed{1}$ $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
$\boxed{2}$ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

$\boxed{3}$ $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عدد زوجي} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عدد فردي} \end{cases}$

حاول أن تحل (3) صـ 24 :

$\boxed{a}$ اكتب بالصورة الجذرية كلا من :

$\boxed{1}$ $x^{0.4}$

$\boxed{2}$ $y^{\frac{3}{8}} \ , \forall y \geq 0$

$\boxed{b}$ اكتب بالصورة الأسية كلا من :

$\boxed{1}$ $\sqrt[3]{x^2}$

$\boxed{2}$ $(\sqrt{y})^3 \ , \forall y \geq 0$

تذكرة بقوانين الأسس: $(a, b \neq 0)$ ، $\forall a, b \in R$ ، $\forall m, n \in Z$	
1. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ , a \neq 0$
2. $(\dfrac{a}{b})^m = \dfrac{a^m}{b^m} \ , b \neq 0$	5. $(a^m)^n = a^{m.n}$
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \ , a \neq 0$

حاول أن تحل (5) صـ 26 : بسط كلا من الأعداد التالية مستخدما قوانين الأسس :

$a)\ 25^{-\frac{3}{2}} =$

$c)\ \left(\dfrac{16\,x^{14}}{81\,y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}} =$ $\quad , x \geq 0 \, , y > 0$

قوانين الجذور النونية :	إذا كان $\sqrt[n]{x} , \sqrt[n]{y}$ عددين حقيقيين ، فإن :
$\boxed{1}$ $\sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x.y}$	
$\boxed{2}$ $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad , y \neq 0$	
$\boxed{3}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$	

حاول أن تحل (6) صـ 28 : بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية :

$a) \sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{27} =$

$b) \frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}} =$

$c) \sqrt{\sqrt[3]{729}} =$

$d) \left(\sqrt[4]{x} . \sqrt[4]{y^3}\right)^{-12} , x, y \in \mathbb{Q}^+$

(f) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} \,.\, y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \,.\, y^{-\frac{1}{2}}}$ $, x > 0, y > 0$

(g) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \,.\, y^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}} \,.\, y^{-\frac{1}{2}}}$ $, x > 0, y > 0$ ،

(i) $\left(\dfrac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}$ $, t > 0$

3 حل المعادلات - البند (3 - 1)

المعادلات الجذرية : هي معادلة أس المتغير فيها عدد نسبي (ليس عدد صحيح) أو يتضمن المجذور متغير .

سوف تختصر دراستنا على المعادلات التي تحتوي جذر بداخله حدودية درجة أولى أي المعادلات التي تحوي $\sqrt{ax+b}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ لذلك سوف نميز ست أشكال لهذه المعادلات :

أولا : المعادلة ذات الشكل : $\sqrt{ax+b} =$ عدد موجب

خطوات الحل : نوجد شرط الحل (ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر) ثم نربع طرفي المعادلة فنحصل على معادلة درجة أولى نحلها ثم إذا كان الحل يحقق شرط الحل نقبله وإذا لم يحقق شرط الحل لا نقبله .

تدرب مع سما

حاول أن تحل (1) صـ 31 : أوجد مجموعة حل المعادلة التالية :

$$\sqrt{5x+4} - 7 = 0$$

الحل:

ثانيا : المعادلة ذات الشكل: $\sqrt{ax+b} =$ عدد سالب

تكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية ϕ لأن $\sqrt{ax+b}$ موجب لا يمكن أن يساوي عدد سالب .

حاول أن تحل (1) صـ 31 : أوجد مجموعة حل المعادلة التالية : $\sqrt{x-2}+9=0$

الحل:...

ثالثا : المعادلة ذات الشكل: $(ax+b)^{\frac{m}{n}} = c \quad , \quad n, m \in \mathbb{Z}^{+} - \{0\}$

خطوات الحل : في البداية ننتبه أن n هي دليل الجذر فإذا كانت n عدد زوجي فهناك شرط للحل هو $ax+b \geq 0$ واذا كانت n عدد فردي لا يوجد شرط للحل

نرفع طرفي المعادلة للأس $\frac{n}{m}$ كما يلي :

$$[(ax+b)^{\frac{m}{n}}]^{\frac{n}{m}} = (c)^{\frac{n}{m}}$$

هنا نميز حالتين : بالنسبة إلى مقام الاس الجديد

إذا كانت m عدد زوجي	إذا كانت m عدد فردي
$\lvert ax+b \rvert = (c)^{\frac{m}{n}}$	$ax+b = (c)^{\frac{m}{n}}$

فتصبح معادية درجة أولى نحلها .

تدرب مع سما

حاول أن تحل (2) صـ 33 : أوجد مجموعة الحل :

$a)\ 2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$

$b)\ (1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

تدرب مع سما

رابعا : المعادلة ذات الشكل: $\sqrt{ax+b} = cx+d$

خطوات الحل : نوجد شرط الحل (ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر و الطرف الثاني أكبر أو يساوي الصفر ، نقاطع المجموعتين فنحصل على قيم x المقبولة) ثم نربع طرفي المعادلة فنحصل على معادلة درجة ثانية نحلها ثم إذا كان الحل يحقق شرط الحل نقبله وإذا لم يحقق شرط الحل لا نقبله .

حاول أن تحل (3) صـ 33: أوجد مجموعة حل المعادلة التالية : $\sqrt{5x-1}+3=x$

الحل:...

خامسا : المعادلة ذات الشكل: $\sqrt{ax+b}=\sqrt{cx+d}$

حاول أن تحل (4) صـ 34 : أوجد مجموعة حل المعادلة التالية :

$$\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$$

الحل:...

سادسا : المعادلة ذات الشكل: $\sqrt{ax+b}=-\sqrt{cx+d}$

السالب لا يساوي الموجب إلا إذا كان كليهما صفر

خطوات الحل : نشكل المعادلتين

الأولى ما تحت الجذر الأول يساوي الصفر و الثانية ما تحت الجذر الثاني يساوي الصفر ،

نحل المعادلتين إذا وجد حل مشترك للمعادلتين يكون هو حل المعادلة الأساسية وإذا لم يوجد حل مشترك للمعادلتين يكون حل المعادلة الأساسية هو المجموعة الخالية ϕ

حاول أن تحل (4) صـ 34 : أوجد مجموعة حل المعادلة التالية :

$$\sqrt{x-7}+\sqrt{3x-21}=0$$

الحل:

.....

(1) حل كلا من المعادلات :

$a)\ 3\sqrt{x}+3=15$

(3) حل كلا من المعادلات

$a)\ \sqrt{11x+3}-2x=0:$

$b)\ \sqrt{3x+13}-5=x$

$f)\ \sqrt{10x}-2\sqrt{5x-25}=0$

أوجد حل المعادلة : $(2x+1)^{\frac{1}{3}}=(3x+2)^{\frac{1}{3}}$

المعادلات الأسية : هي كل معادلة لها الشكل $a \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$, $a^x = b$

أي معادلة يتضمن أسها على متغير . طريقة الحل نحاول أن نكتب الطرف الثاني على شكل

$b = a^c$ فتصبح المعادلة كما يلي : $a^x = a^c$ ونستفيد من الخاصية :

إذا كان $a^x = a^c$ فإن $x = c$ فتصبح معادلة بسيطة نحلها .

حاول أن تحل (6) صـ 36 : أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلة التالية :

$a)\ 3^x = 243$

$b)\ \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$

$c)\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

تدرب مع سما

تذكر أن: $a^0 = 1$

حاول أن تحل (7) صـ 36 : أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلة التالية :

a) $5^{x^2-4} = 1$

b) $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$

c) $2^{x^2-4} = 32$

(7) حل كلا من المعادلات الأسية التالية :

$a)\ 5^{2x-3} = 125$

$b)\ 3^{x+1} = 1$

$d)\ 3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$

$g)\ 5^{x} = 125\sqrt{5}$