رياضيات الصف الثاني عشر- كتاب الطالب

محتوى المذكرة

البنود الموضوعية

1 النهايات البند (1 - 1)

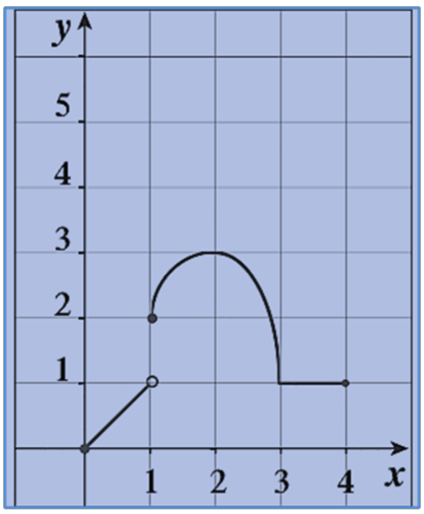
تعريف (1) : لتكن x كميه متغيره ، c عددا حقيقيا .
نقول أن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكميه $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب .

تعريف (2) : ليكن $c\,,L$ عددين حقيقيين ، f دالة حقيقية معرفه في جوار أو جوار ناقص للعدد c نكتب : $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$
و تعني أنه عندما تقترب x من c باطراد ، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L

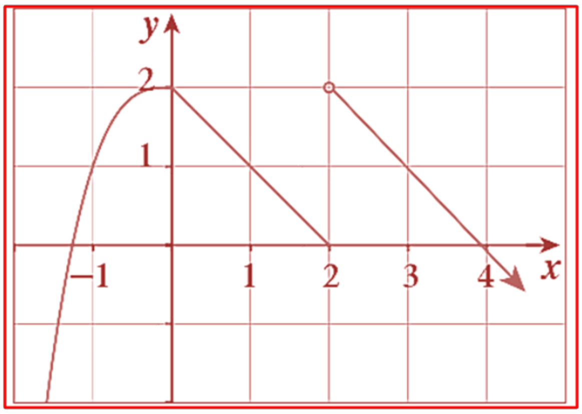
نظرية (1) : بفرض أن $c\,,L$ عددين حقيقيين ،
يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار
و يعبر عن ذلك : $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

تدريب (1) صـ 15: الشكل المقابل يمثل بيان الدالة : $f: [0,4] \to \mathbb{R}$ أكمل ما يلي :

$\boxed{7}\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$	$\boxed{1}\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$
$\boxed{8}\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$	$\boxed{2}\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$
$\boxed{9}\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) =$	$\boxed{3}\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) =$
$\boxed{10}\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$	$\boxed{4}\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$
$\boxed{11}\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$	$\boxed{5}\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$
	$\boxed{6}\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) =$



حاول أن تحل (1) صـ 16: يمثل الشكل المقابل بيان الدالة : f أوجد إن أمكن :



$(a)\quad \lim_{x\to -1} f(x) =$

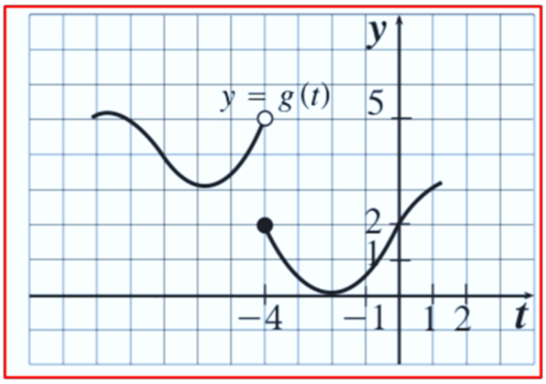
$(b)\quad \lim_{x\to 0} f(x) =$

$(c)\quad \lim_{x\to 2} f(x) =$

$(d)\quad \lim_{x\to 3} f(x) =$

أسئلة من كتاب التمارين بند (1 – 1) صـ 9 :

(1) الشكل المقابل يمثل بيان الدالة g . أوجد إن أمكن :



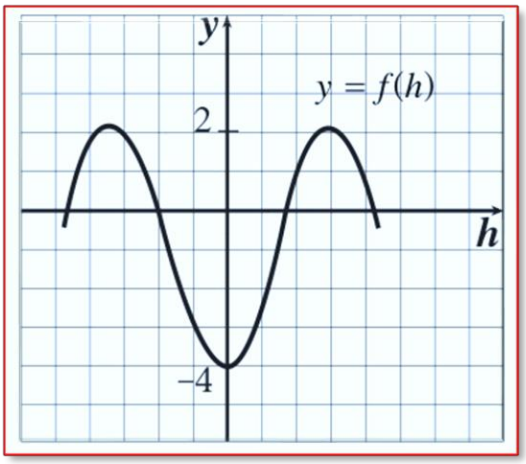
$(a)\quad \lim_{t\to -4^-} g(t)$

$(b)\quad \lim_{t\to -4^+} g(t)$

$(c)\quad \lim_{t\to -4} g(t)$

$(d)\quad g(-4)$

(2) الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f . أوجد إن أمكن :



$(a)\quad \lim_{h\to 0^-} f(x)$

$(b)\quad \lim_{h\to 0^+} f(x)$

$(c)\quad \lim_{h\to 0} f(x)$

$(d)\quad f(0)$

نظرية (2) : إذا كانت f دالة : $f(x) = k$ وكان c , k عددان حقيقيان فإن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

نظرية (3) : إذا كانت f دالة : $f(x) = x$ وكان c عددا حقيقيا فإن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$

نظرية (4) :

إذا كانت k , c , M , L أعدد حقيقية ، وكان $\lim_{x\to c} g(x) = M$, $\lim_{x\to c} f(x) = L$ فإن :

a) قاعدة الجمع : $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

b) قاعدة الطرح : $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

c) قاعدة الضرب : $\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

d) قاعدة الضرب في ثابت : $\lim_{x\to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x\to c} f(x) = k \cdot L$

e) قاعدة القسمة : $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

حاول أن تحل (2) صـ 17: بفرض أن : $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ أوجد :

$(a) \lim_{x\to 2}\big(f(x) + g(x)\big)$ $(b) \lim_{x\to 2}\big(f(x) \cdot g(x)\big)$, $(c) \lim_{x\to 2} \left(\frac{8.f(x).g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$

الحل:

الكراسة (3) بفرض أن : $\lim_{x\to4} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to4} g(x) = 3$ أوجد :

$(a)\ \lim_{x\to4}(g(x)+3)\ ,\ (b)\ \lim_{x\to4} xf(x)\ ,(c)\ \lim_{x\to4}(g(x).g(x))\ ,\ (d)\ \lim_{x\to4} \frac{g(x)}{f(x)-1}$

الحل:

نظرية (5) : دوال كثيرات الحدود و دوال الحدوديات النسبية

a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ دالة كثيرة حدود ، c عددا حقيقيا فإن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

b) إذا كانت $f(x)\,, g(x)$ كثيرتي حدود ، c عددا حقيقيا فإن :

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , \quad g(c) \neq 0$$

حاول أن تحل (3) صـ 18: أوجد :

$(1)\lim_{x\to1}(x^3+3x^2-2x-17)$, $(2)\ \lim_{x\to2}\left(\frac{x^2+5x+6}{x+2}\right)$

الحل:

حاول أن تحل (4) صـ 19: إذا كانت الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : \quad x < 2 \\ x - 1 & : \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

الحل:

حاول أن تحل (5) صـ 19: إذا كانت الدالة g :

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : \quad x > 1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : \quad x \leq 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

حاول أن تحل (6) صـ 20: لتكن f: $f(x) = x^2 - |x+2|$

a) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b) أوجد $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

نظرية (6) : بفرض أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجوده وكانت n عددا صحيحا موجبا فإن :

$$(a)\ \lim_{x\to c} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$$

$$(b)\ \lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}\ ,$$ (في حالة n عددا زوجيا يشترط أن تكون $c > 0$)

$$(c)\ \lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}\ ,$$ (في حالة n عددا زوجيا يشترط أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$)

حاول أن تحل (7) صـ 22: أوجد : $(a)\ \lim_{x\to 5} \sqrt{x^2-5}$, $(b)\ \lim_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\right)^4$

الكراسة :

$(4)\ \lim_{x\to -\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1))$	$(6)\ \lim_{x\to -4} (x+3)^{1998}$

$$(c)\ \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$$

إلغاء العامل الصفري في المقام

1) عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط و المقام و حصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى صيغة غير معينة.

2) يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بمرافق أو توحيد المقام أو غيرها لإزالة هذه الصيغة .

تذكرة بالمتطابقات التربيعية والتكعيبية :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

حاول أن تحل (8) صـ 33: أوجد إن أمكن :

$(a)\quad \lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

الحل:

$(c)\lim_{x\to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

في التمارين(16 – 11) ، أوجد :

(11) $\lim_{x\to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x}$

الحل:

(12) $\lim_{t\to 2} \frac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

الحل:

(13) $\lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^3-27}{x}$

الحل:

(14) $\lim_{x \to -2} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

الحل:

مثال (8) صـ - c- 23:

$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

حاول أن تحل (8) صـ 23: أوجد إن أمكن :

$$(b)\lim_{x\to -7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$$

حاول أن تحل (9) صـ 25:

$$(b)\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

إلغاء العامل الصفري في المقام

1) عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط و المقام و حصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى صيغة غير معينة.

الضرب بمرافق.

حاول أن تحل (9) صـ 25: أوجد :

$$(a)\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

الحل:

$(c)\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

$(15)\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$

الحل:

حاول أن تحل (10) صـ 26: أوجد إن أمكن :

$(a)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

$(b) \lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

2 نهايات تشتمل على $\infty , -\infty$ البند (2 - 1)

أولا : نهايات محدده عندما $x \to \pm\infty$

تعريف (3) : لتكن f داله معرفه في الفترة (a , ∞) فإن

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞

تعريف (4) : لتكن f داله معرفه في الفترة $(-\infty , a)$ فإن

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$

نظرية (7) : لتكن f : $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية (8) : لتكن f : $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $f(x) = \frac{k}{x^n}$ فإن :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

3 صيغ غير معينه - البند (3 - 1)

الاستاذ: وليد حسين 50522331

SCAN ME!

ملاحظة : لتكن $f(x) = ax^n \ , n \in \mathbb{Z}^+ , a \in \mathbb{R}^*$:

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن :

$$\lim_{n\to\pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$$

(2) إذا كان n عدد فردي فإن :

$$\lim_{n\to\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases} \quad ، \quad \lim_{n\to-\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & a > 0 \\ \infty & a < 0 \end{cases}$$

ملاحظة : إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \ , \ a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$

حاول أن تحل (1) صـ 37: أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} (-3x^2 + 2x - 4)$:

نظريه (11) : إذا كانت كل من $f \,,\, g$ دالة حدودية حيث :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$$ فإن

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \quad , \ n = m$$

$$(b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad , \ n < m$$

ملاحظة : تبقى النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

حاول أن تحل (2) صـ 39: استخدم النظرية السابقة في حساب كل من :

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$$

$$(b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$$

حاول أن تحل (3) صـ 40: أوجد قيمة كل من الثابتين $a \,,\, b$ إذا كانت :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - 2}{ax^2 + bx - 3} = -1$$

أسئلة من كتاب التمارين بند (3 – 1) صـ 15 :

(11) إذا كانت :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + 4}{3x^2 - 2x + 1} = -1$$

أوجد قيم $a\,,b$.

الحل:..

(12) إذا كانت :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 + 2x - 5}{ax^3 + bx^2 + 3} = -1$$

أوجد قيم $a\,,b$.

الحل:..

حاول أن تحل (4) صـ 41: أوجد:

$(a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

حاول أن تحل (4) صـ 41

$(b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

الحل:

الكراسة : أوجد

(9) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$

4 نهايات بعض الدوال المثلثية - البند (4 - 1)

نظرية (12): حيث x بالراديان , $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة (1): إذا كان $a\,, b$ عددين حقيقيين، $a \neq 0\ ,\ b \neq 0$ فإن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\tan x = 0$$

حاول أن تحل (1) صـ 43: أوجد النهاية :

$(1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2x^2 - x}\right)$

الحل:..

$(2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x\cos x}\right)$

الحل:..

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{\cos x - 1}\right)$

أسئلة من كتاب التمارين بند (4 – 1) صـ 17 :

في التمارين(9 – 1) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos 2x}$

الحل:

نتيجة (2) : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

نتيجة (3) : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

حاول أن تحل (2) صـ 44: أوجد :

(a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{2\tan x}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\tan x + x^2 \cos x}{5x}\right)$

حاول أن تحل (3) صـ 45: أوجد :

$(a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x - x^2}{3x^2}\right)$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}\right)$

الحل:

$(4)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\cos x}$ الكراسة

الحل:

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$

الحل:

(8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

الحل:

في التمارين(10 – 12) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

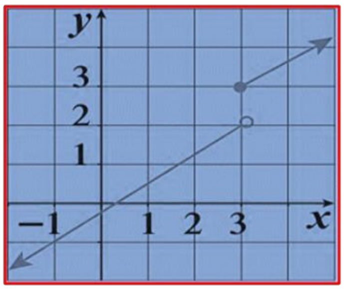
(11) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\tan 2x}$	(10) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$

(12) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}$

5 الاتصال - البند (5 - 1)

تدريب صـ 49 :

1



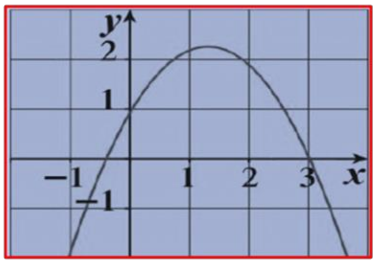
$\lim_{x\to3} f(x)$ ... ...

$f(3)$ ... ...

ماذا تلاحظ ؟

....

2



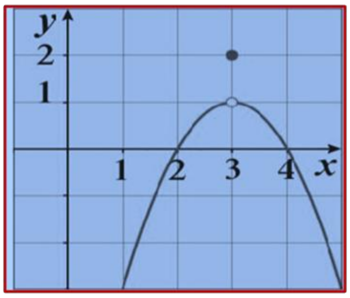
$\lim_{x\to3} f(x)$ ... ...

$f(3)$ ... ...

ماذا تلاحظ ؟

....

3



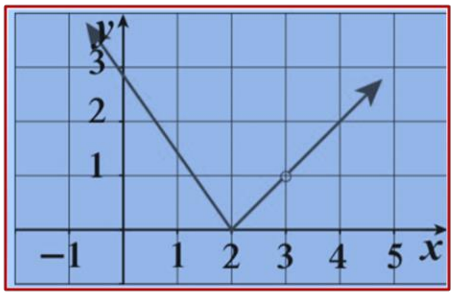
$\lim_{x\to3} f(x)$ ... ...

$f(3)$ ... ...

ماذا تلاحظ ؟

....

4



$\lim_{x\to3} f(x)$ ... ...

$f(3)$ ... ...

ماذا تلاحظ ؟

....

تعريف (8) : الاتصال عند نقطة تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت

$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ، لتكون الدالة f متصلة عند c يجب أن تتوفر الشروط الثلاثة التالية :

(1) الدالة f معرفه عند $x = c$ أي أن $f(c)$ موجوده

(2) $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة (3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

حاول أن تحل (1) صـ 50: لتكن الدالة f : ابحث اتصال الدالة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

مثال (2) صـ 50: لتكن الدالة f : ابحث اتصال الدالة عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 7 & : x \leq 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \end{cases}$$

حاول أن تحل (2) صـ 50: ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2+1 & : x > 2 \end{cases}$$

الحل:

حاول أن تحل (3) صـ 51: ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{|x+1|} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

الحل:..

أسئلة من كتاب التمارين بند (5 – 1) صـ 19 :

في التمارين(9 – 6) : ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$(6)\ f(x) = \begin{cases} x + 5 & x \geq 0 \\ 5 - x & x < 0 \end{cases} \quad , \quad x = 0$$

$$(7)\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1} & : x \neq -1 \\ -1 & : x = -1 \end{cases} \quad , \quad x = -1$$

$$(8)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases} \quad , \quad x = 0$$

$$(9)\ g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & : x = 1 \end{cases} \quad , \quad x = 1$$

$\mathbf{(10)}$: أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : x < 3 \\ 2ax & : x \geq 3 \end{cases}$$

6 نظريات الاتصال - البند (6 - 1)

نظريه (14) : إذا كانت g , دالتين متصلتين عند $x = c$ فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

الجمع : $(1)\ f + g$

الطرح : $(2)\ f - g$

الضرب في ثابت : $(3)\ k.f \quad , k \in \mathbb{R}$

الضرب : $(4)\ f.g$

القسمة : $(5)\ \frac{f}{g} \quad , \quad g(c) \neq 0$

دوال متصلة

(1) الدالة f : $f(x) = k$ حيث k ثابت ، متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$

(2) الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$

(3) الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$

(4) الدالة f : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$

(5) الدوال المثلثية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$

حاول أن تحل (1) صـ 55: ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي :

$(a) f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x| \quad , c = 3$

الحل:

$(b) f(x) = \dfrac{\tan x}{x+1} \quad , c = \dfrac{\pi}{4}$

الحل:

حاول أن تحل (2) صـ 55: ابحث اتصال الدالة f :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2} \quad \text{عند} \quad x = 1$$

الحل:

نظريه (15) :

(a) الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب

و متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1

(b) إذا كانت f دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $f(c) > 0$

فإن الدالة : $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x = c$

ملاحظة : لإثبات ان دالة جذر تربيعي متصلة عند $x = c$ نثبت شيئان ما تحت الجذر متصل عند $x = c$ وما تحت الجذر موجب عند $x = c$

حاول أن تحل (3) صـ 56: ابحث اتصال كل من الدالتين عند $x = -2$

$$(a)\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 4}$$

الحل:...

$$(b)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

الحل

الدالة المركبة :

إذا كان كل من f , g دالتين حقيقيتين و كان مدى الدالة f مجموعه جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h :

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

حاول أن تحل (4) صـ 58: إذا كانت f , g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

أوجد : $f(x) = 2x + 3 \ , g(x) = x^2 + 3$

$(a)\ (g \circ f)(x)$, $(b)\ (g \circ f)(-1)$, $(c)\ (f \circ g)(x)$, $(d)\ (f \circ g)(-1)$

الحل:..

....

....

....

....

....

بند (6 – 1) صـ 23 : في التمارين(5 – 1)

(7) الدالتان f , g معرفتان كما يلي : $g(x) = x^2 + 4$, $f(x) = \sqrt{x}$ أوجد :

$(a)\ (f \circ g)(x)$

$(b)\ (f \circ g)(2)$

$(c)\ (g \circ f)(x)$

$(d)\ (g \circ f)(2)$

نظرية (16) :

إذا كانت f متصلة عند $x = c$ ، g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند $x = c$

ملاحظة : لإثبات ان الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند $x = c$ نتبع الخطوات :

(1) نثبت أن الدالة الثانية f متصلة عند $x = c$.

(2) نوجد $f(c) = \mathrm{k}$.

(3) نثبت أن الدالة الأولى g متصلة عند $x = k$.

حاول أن تحل (6) صـ 60: لتكن f , g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$:

حاول أن تحل (7) صـ 60: لتكن : $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الكراسة

(10) ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \left|\sqrt{x} - 3\right|$ عند $x = 4$

الحل:

7 الاتصال على فترة - البند (7 - 1)

تعريف (9) :

الاتصال على فترة مفتوحه : لتكن الدالة f معرفه على الفترة $(a\ ,b)$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,b)$ إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,b)$

تعريف (10) : الاتصال على فترة مغلقه

لتكن الدالة f معرفه على الفترة $[\ a\ ,b\ ]$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة الفترة $[\ a\ ,b\ ]$ إذا تحققت الشروط التالية :

(1) الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,b)$

(2) الدالة f متصلة عند $x=a$ من جهة اليمين أي أن : $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=f(a)$

(3) الدالة f متصلة عند $x=b$ من جهة اليسار أي أن : $\lim\limits_{x\to b^{-}} f(x)=f(b)$

حاول أن تحل (1) صـ 62: ادرس اتصال الدالة f على $[\ 1\ ,5\ ]$ حيث:

$$f\ (x)\ =\begin{cases} 2 & : x=1 \\ \dfrac{x^{2}+1}{x} & : 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : x=5 \end{cases}$$

حاول أن تحل (2) صـ 63: ادرس اتصال الدالة f على الفترة المبينة :

$(a)\ f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2} \quad ,[\,0\,,3\,]$

الحل:

$(b)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} \quad ,[\,0\,,2\,]$

الحل:

مثال (3) صـ 64: ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث :

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & : x \leq -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

الحل:

(6) الدالة معرفة كما يلي : $f(x) = \begin{cases} -x+4 & : x \leq 7 \\ \frac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$ ادرس اتصال الدالة

الحل:

حاول أن تحل (4) صـ 65: لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax+b & : 1 < x < 4 \\ b+8 & : x = 4 \end{cases}$$

متصلة على $[1, 4]$. أوجد قيمة الثابتين a, b

الحل:

تعميم : إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما ، $g(x) \geq 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة . أي لإثبات أن دالة جذر تربيعي متصلة على فترة نثبت شيئان :

1) أن ما تحت الجذر متصل على هذه الفترة 2) أن ما تحت الجذر موجب في هذه الفترة

حاول أن تحل (5) صـ 66: لتكن f : $f(\mathrm{x}) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[\,6\,,\ 10\,]$

الحل:

حاول أن تحل (6) صـ 66: لتكن f : $f(\mathrm{x}) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

ادرس اتصال الدالة f على $[\,1\,,\ 3\,]$

الحل:

12) لتكن f : $f(\mathrm{x}) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ ، أوجد D_f ثم ادرس اتصالها على $[\,0\,,\ 4\,]$

الحل:

في التمرينين(13 – 14) ، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها .

$(13)\ f(\mathrm{x}) = \sqrt{8 - 2x^2}$

الحل:

ملاحظه : ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو داله متصلة على $\mathbb{R}$

حاول أن تحل (6) صـ 66: لتكن f : $f(\mathrm{x}) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

الحل:

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$

(16) $f(\mathrm{x}) = |3x^2 + 4x - 1|$