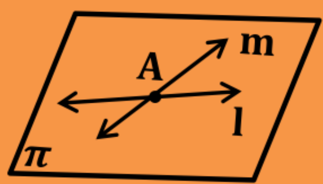
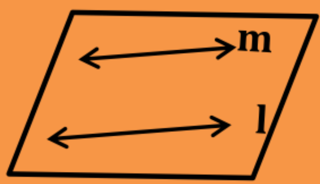
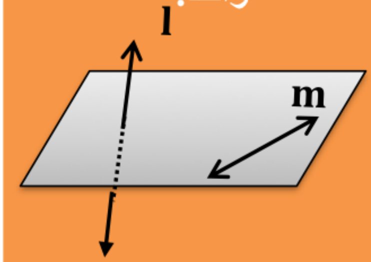
الوحدة العاشرة: هندسة الفضاء

11

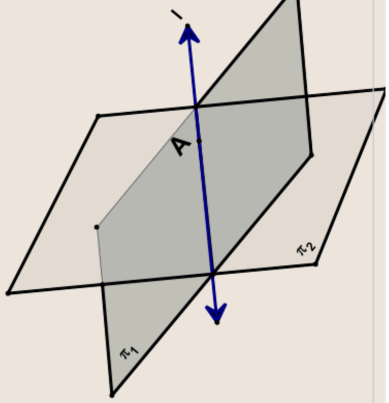
(10-1) المستقيمات والمستويات في الفضاء

أوضاع المستقيمات في الفضاء

متقاطعان	متوازيان	متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحدوكان بينهما نقطةواحدة مشتركة فقط.	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.	إذا كان لا يحتويهما مستوٍ واحد.
		
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi , \overleftrightarrow{m} \subset \pi$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \emptyset \Rightarrow \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi , \overleftrightarrow{m} \not\subset \pi$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \emptyset$

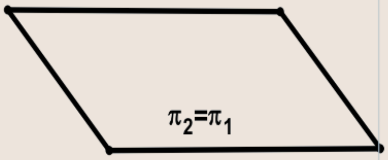
أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

- المستويان متقاطعان في مستقيم.



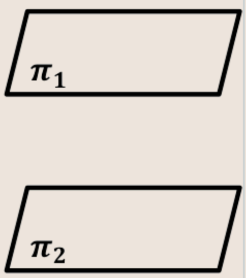
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$

- المستويان منطبقان(يشتركان في جميع النقاط).



$\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \pi_1 // \pi_2$

- المستويان متوازيا(لا توجد نقاط مشتركة بينهما).

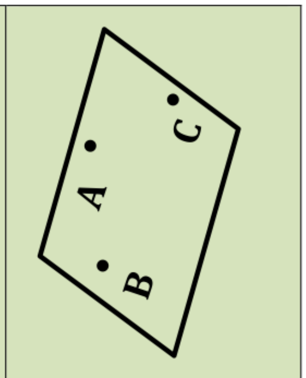
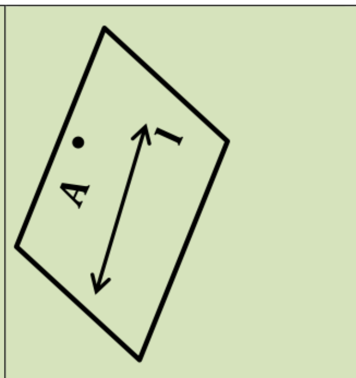
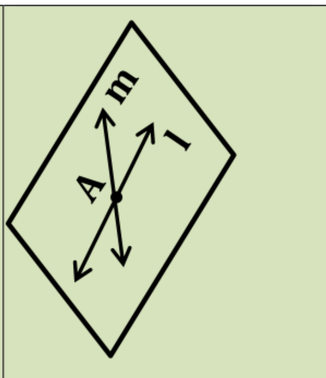
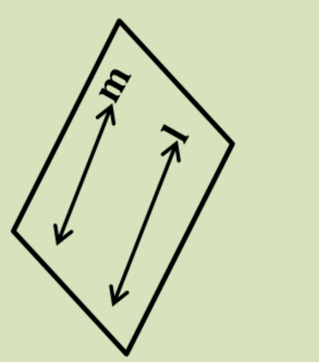


$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Rightarrow \pi_1 // \pi_2$

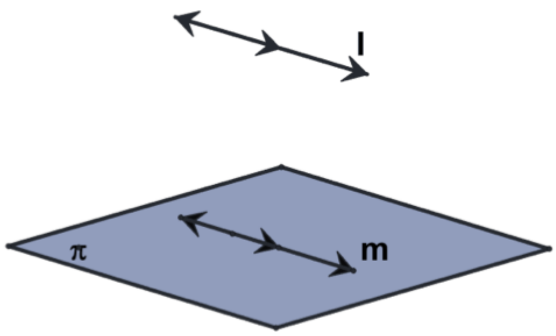
حالات تعيين المستوي في الفضاء:

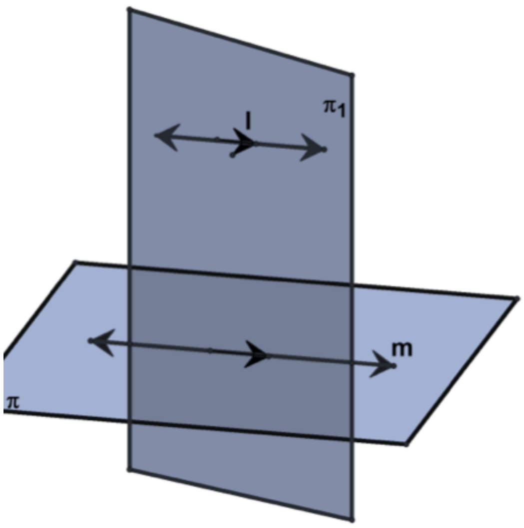
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

تدرب معنا

ثلاث نقاط غير مستقيمة	مستقيم ونقطة خارجة عنه	مستقيمان متقاطعان	مستقيمان متوازيان
			

نظرية (1) إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.





إذا كان $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{m} \subseteq \pi$

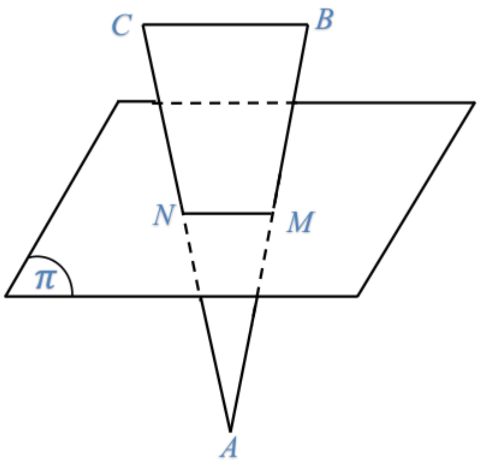
فإن $\overleftrightarrow{l} // \pi$

حاول أن تحل صـ (125)

(1) في الشكل المقابل : المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$

N , M تنتميان إلى المستوي π

أثبت أن : $\overleftrightarrow{BC} \,//\, \pi$



نظرية (2) إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

إذا كان $\overleftrightarrow{l}//\pi$,$\overleftrightarrow{l} \subseteq \pi_1$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{m}$

فإن $\overleftrightarrow{l}//\overleftrightarrow{m}$

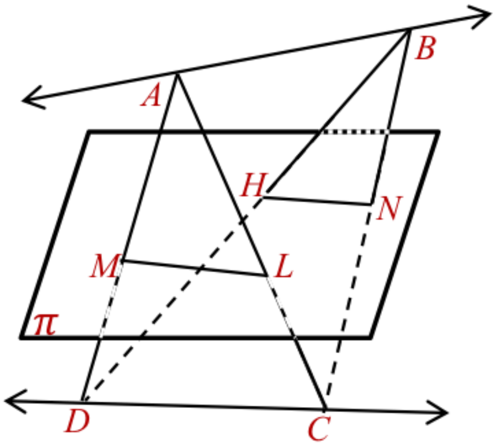
نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

حاول أن تحل صـ (126) في الشكل المقابل :إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متخالفا ن ، $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \pi$

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M ، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H ، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N

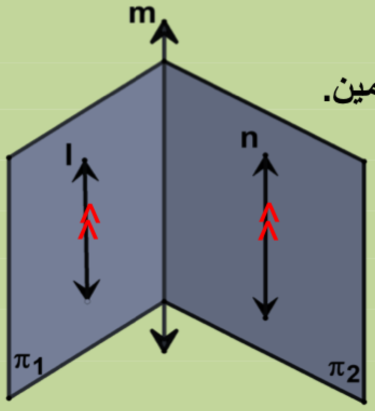


الحل :

نتيجة (1):

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

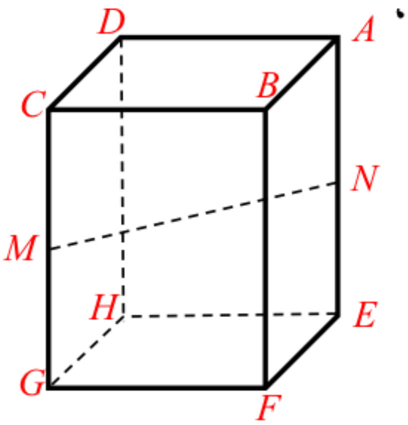


إذا كان $\left(\overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{l} \,, \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1 \,, \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{m}\right)$

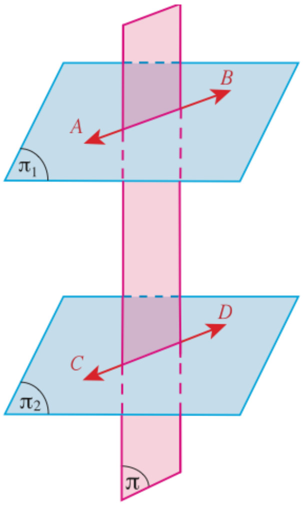
فإن $\overleftrightarrow{m} \,//\overleftrightarrow{l}\,//\overleftrightarrow{n}$

حاول أن تحل صـ (3) (126)ABCDEFGH شبه مكعب ، M منتصف $\overline{CG}$ ،

N منتصف $\overline{AE}$ أثبت أن (EFG) يوازي $\overleftrightarrow{MN}$



أ:وليد



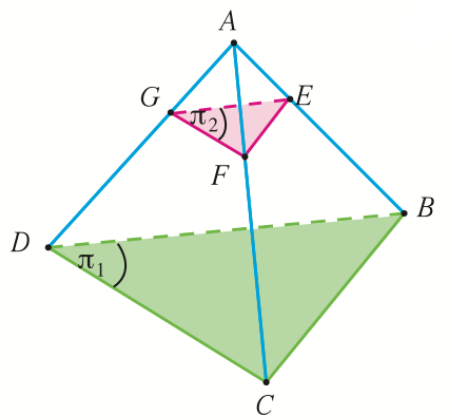
نظرية (4) إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين

إذا كان :

$$\pi_1 \; // \; \pi_1 \; , \; \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB} \; , \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$$

فإن : $\overleftrightarrow{AB} \; // \; \overleftrightarrow{CD}$

حاول أن تحل صـ (126)



في الشكل المقابل ABCD هرم ثلاثي ، المستويان π_1 ، π_2 متوازيان

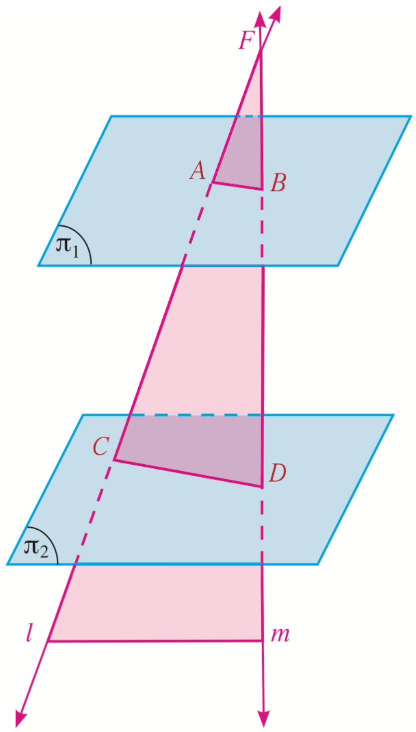
إذا كان : $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، FG = 6 cm فأوجد DC

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $FB = 5\text{ cm}$

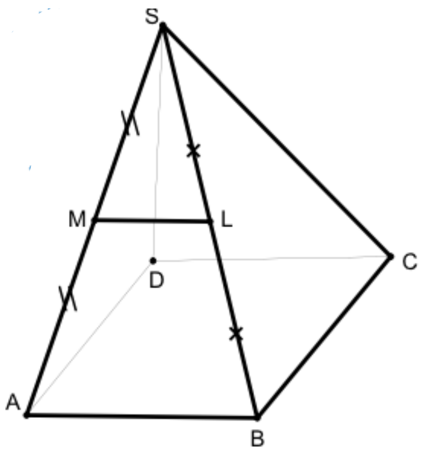
فأوجد محيط المثلث FAB



(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

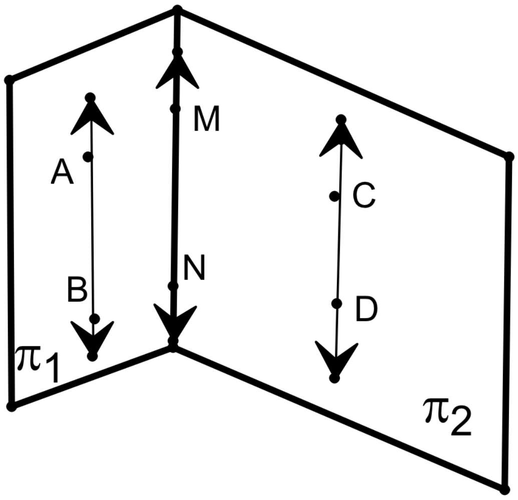


(7) ليكن π_2, π_1 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

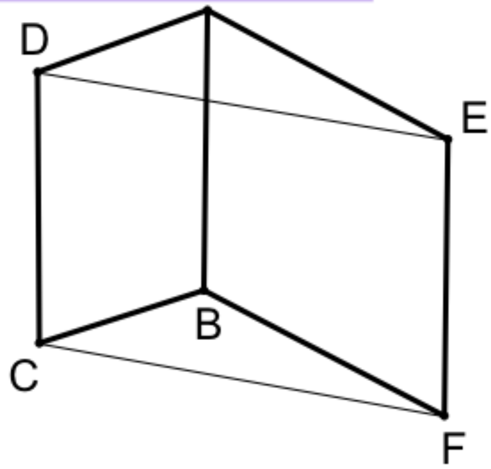
و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



(8) $ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

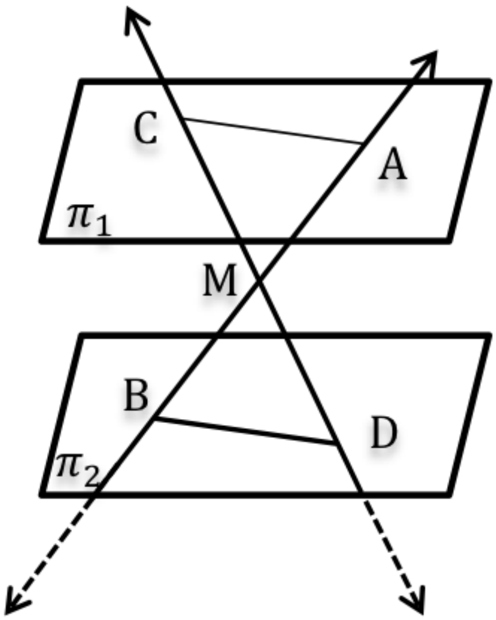
أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع



(9) في الشكل المقابل π_2 , π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

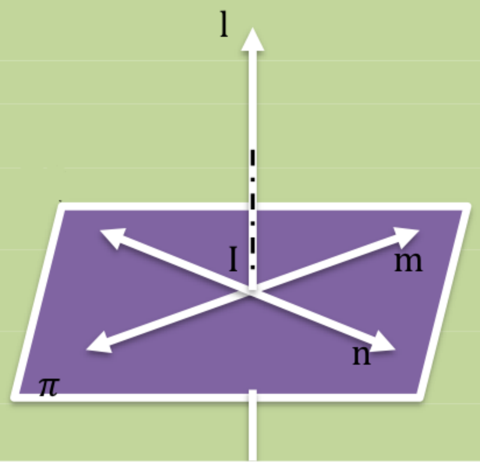
أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



تدرب معنا

تعامد مستقيم مع مستوٍ

تعريف : يكون المستقيم l عموديا على المستوى π إذا كان المستقيم l عموديا على جميع المستقيمات الواقعه في π و يرمز لذلك بالرمز $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$



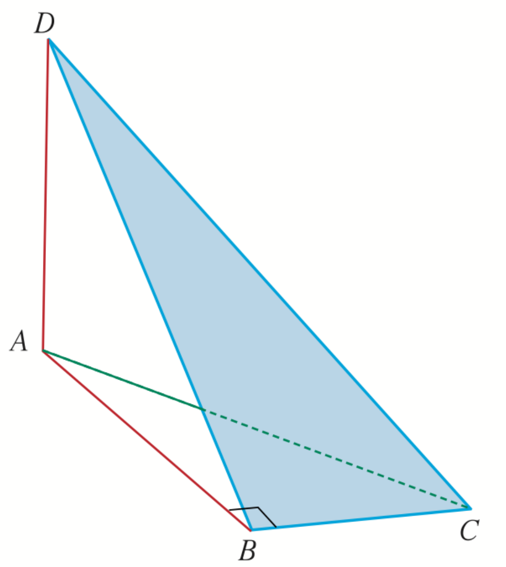
نظرية (5) المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \;, \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GH} \perp (EFGh)$$

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

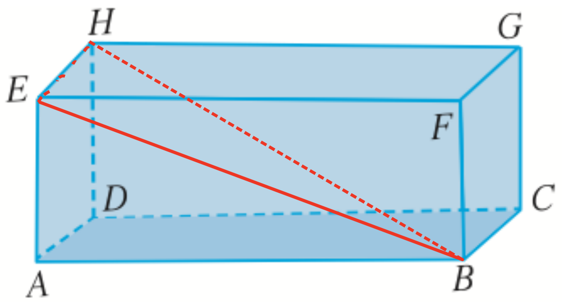
$.\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

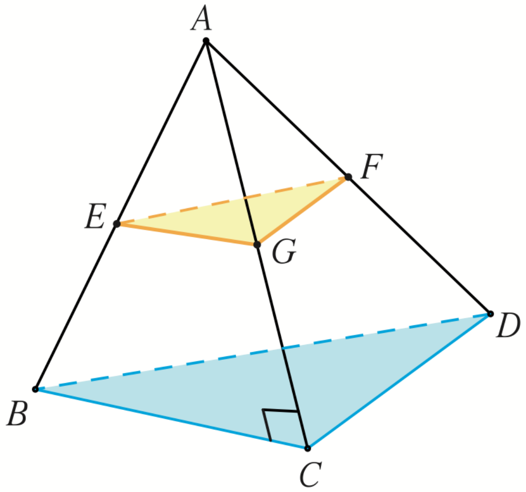


1 في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.



تدرب معنا



في الشكل المقابل:

A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ على الترتيب.

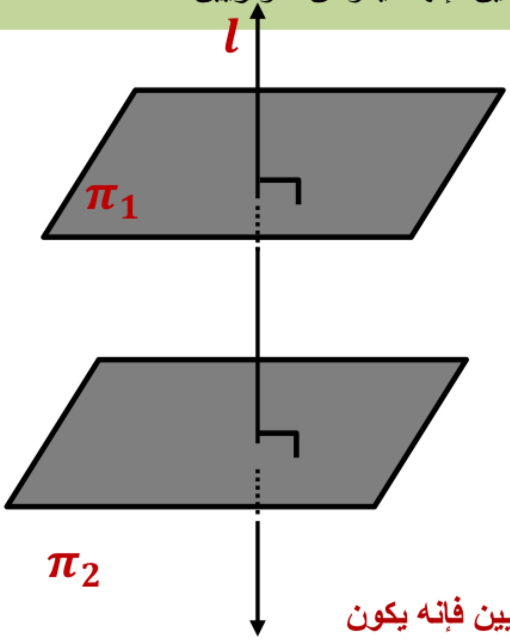
إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$.

تدرب معنا

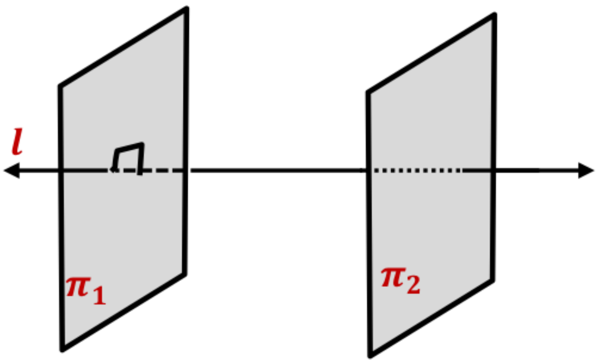
نظرية (6) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين



إذا كان $l \perp \pi_1 , l \perp \pi_2$

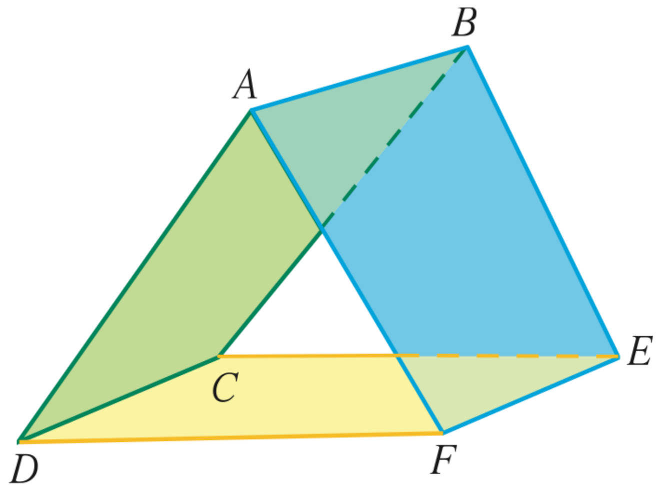
فأن $\pi_1 // \pi_2$

نظرية (7) إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الآخر



إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \pi_1 // \pi_2$
فأن $\overleftrightarrow{l} // \pi_2$

إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 , \pi_1 // \pi_2$
فأن $\overleftrightarrow{l} // \pi_1$



في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

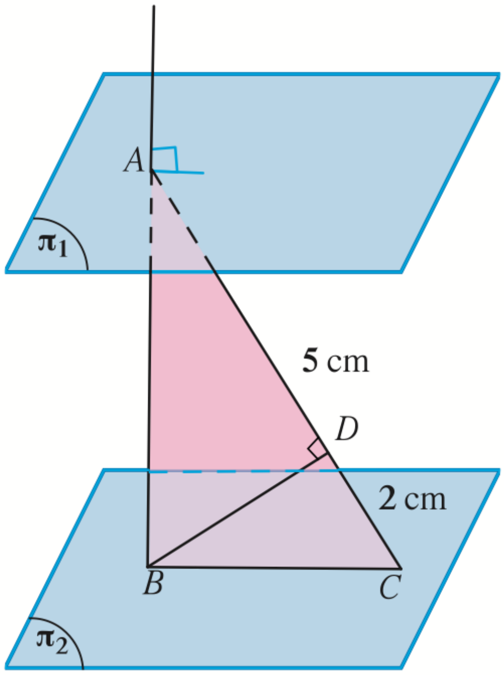
أثبت أن: $(BEC) \parallel (AFD)$

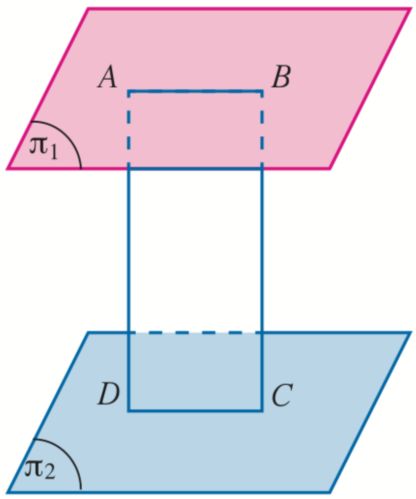
في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \parallel \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ في المستوي ABC

إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$ ، $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD





في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

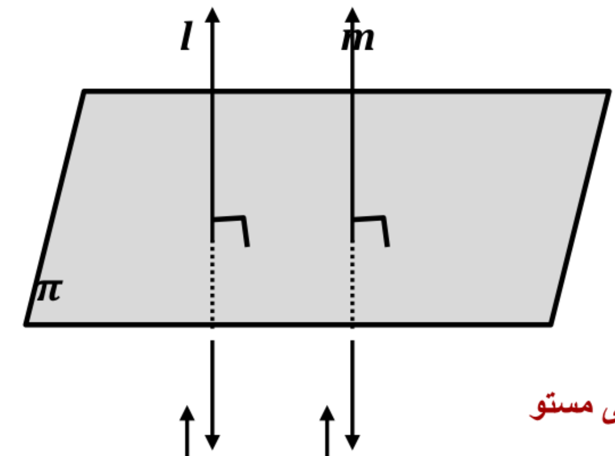
C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2 \;,\; \overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

نظرية (8)

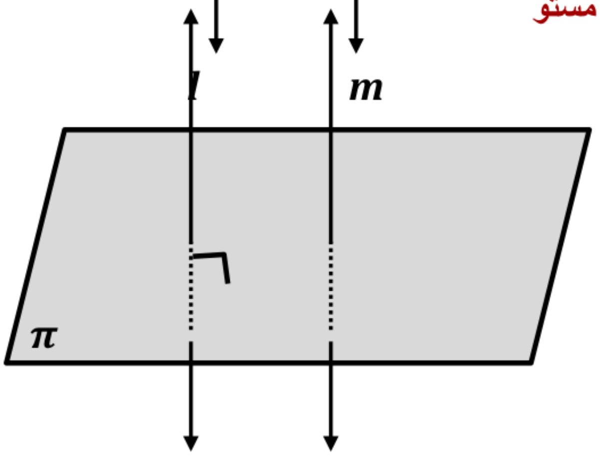
المستقيمان العموديان على مستو متوازيان



إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ m \perp \pi$

فأن $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$

نظرية (9) إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الآخر عموديا على المستوى أيضا



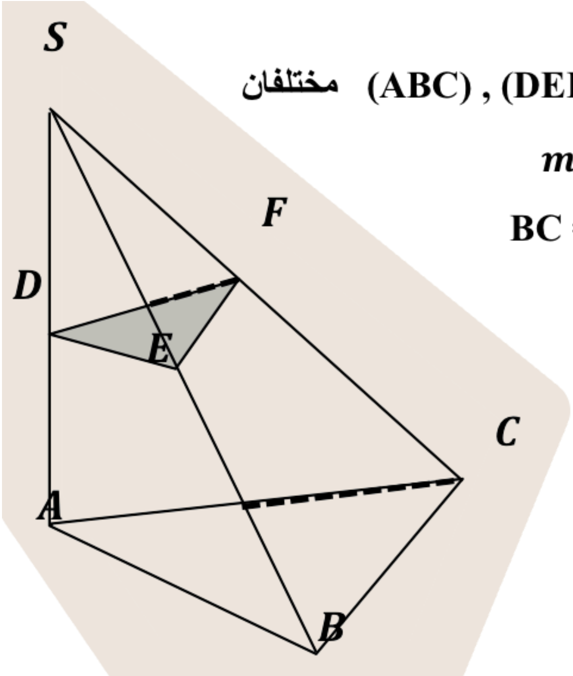
إذا كان $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l} \perp \pi$

فإن $\overleftrightarrow{m} \perp \pi$

$\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m} \ , \overleftrightarrow{m} \perp \pi$

فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

تدرب معنا



حاول أن تحل(4) صفحة (136) في الشكل المقابل : المستويان (DEF) , (ABC) مختلفان

$m\left(\widehat{ABC}\right) = 90^\circ$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (DEF)$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان : BC = 5 cm , AC = 6cm , SD =3cm , DA =2cm

فأوجد محيط $\Delta\, DEF$

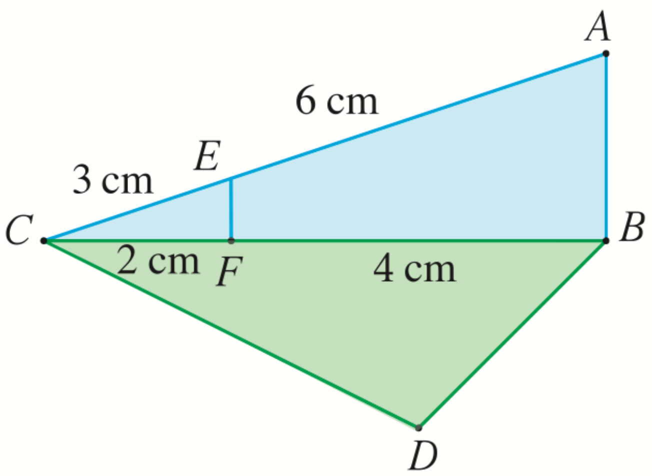
الحل :

تدرب معنا

في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $FB = 4\text{ cm}$, $CF = 2\text{ cm}$, $EA = 6\text{ cm}$, $CE = 3\text{ cm}$

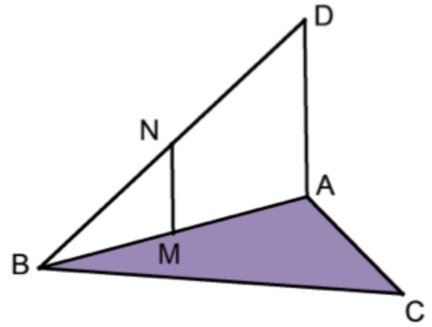
أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



تدرب معنا

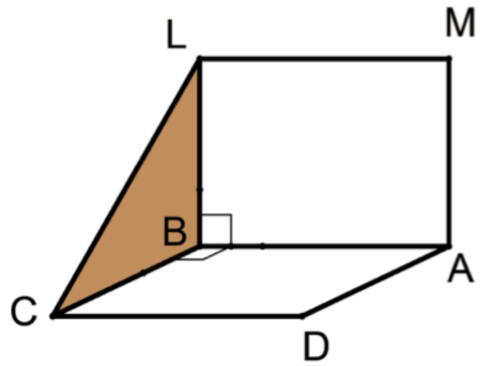
ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًّا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$

فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{DB}$ ، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

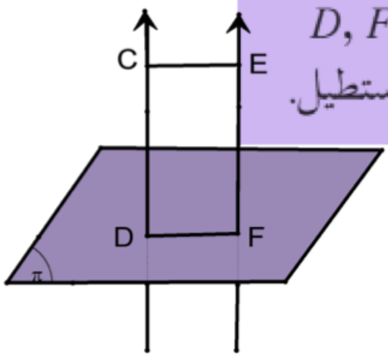


(11) $ABCD$ ، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$ ،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$



ليكن $\overleftrightarrow{EF}$,$\overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.

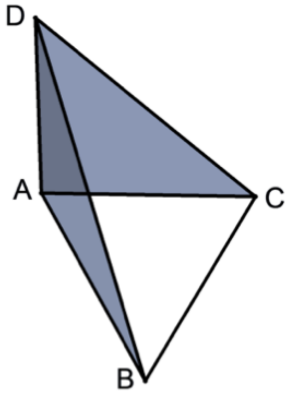


تدرب معنا

(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

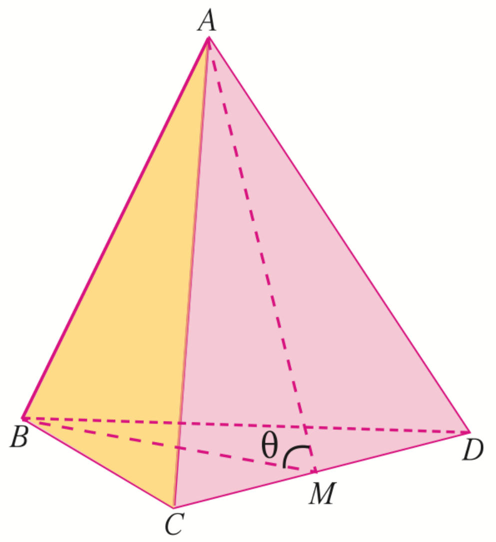


تدرب معنا

الزاوية الزوجية

يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$



a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

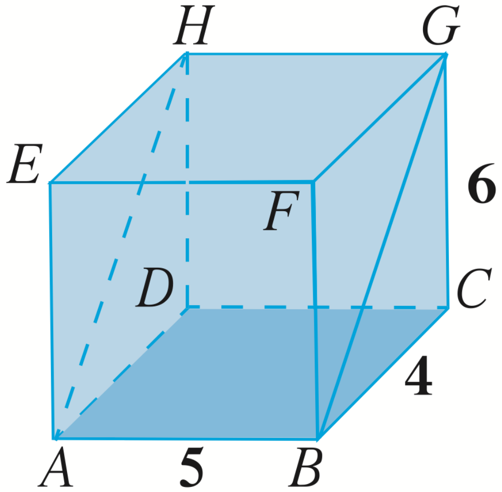
المعطيات: $ABCD$ هرم أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.

طول الحرف = 8 cm، M منتصف $\overline{DC}$.

a المطلوب: تحديد الزاوية المستوية بين المستويين: BDC , ADC

تدرب معنا

في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$ ، $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.



i teacher المعلم الذكي

تدرب معنا

سما SAMA

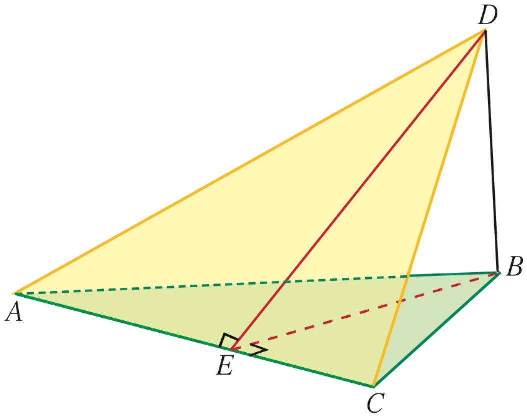
أ:وليد

في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $DB = 5\text{ cm}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$



أوجد:

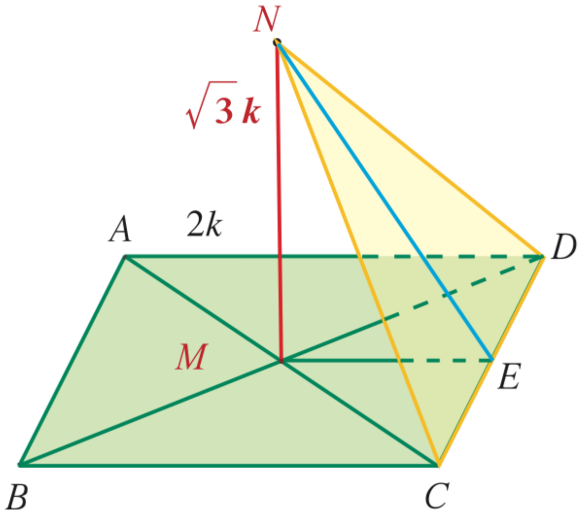
a BE , DE

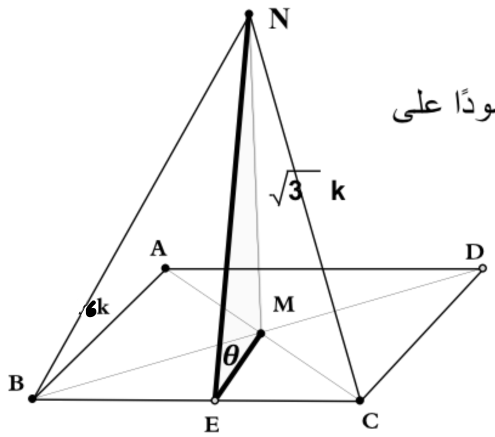
b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$





حاول أن تحل(3) صفحة (142) في الشكل المجاور

ABCD مستطيل تقاطع قطراه في M ، وفيه AB = 6 k أقيم $\overline{MN}$ عمودًا على

(ABCD) حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

فأوجد قياس الزاوية الزوجيه بين المستويين NBC , (ABCD)

العمل : نأخذ E منتصف $\overline{BC}$ و نصل $\overline{BC}$

الحل :

i teacher
المعلم الذكي

تدرب معنا

سما SAMA

$MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC،
طول ضلعه 10 cm ، إذا كان $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MAC}) = 90°$ ، $MA = 5\text{ cm}$ ، D منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$ **(b)** أوجد قياس الزاوية الزوجية بين $(MBC), (ABC)$