10

@SAMA.I_TEACHER

www.samakw.net

٨ حســـاب المثلثات (٢)

	الوحدة الثامنة : حساب المثلثات (٢)
(٨ ــ ١)	دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)
(٨ ــ ٢)	العلاقات بين الدوال الدائرية ١
(٨ ــ ٣)	العلاقات بين الدوال الدائرية ٢

قا$\theta = \frac{1}{\text{جتا}\theta}$ ؛ قتا$\theta = \frac{1}{\text{جا}\theta}$ ؛ ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ؛ ظتا$\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ المقام $\neq 0$

- دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص

- دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س

- دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظا$\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ؛ س $\neq 0$

- دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قا$\theta = \frac{1}{\text{س}}$ ؛ س $\neq 0$

- دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتا$\theta = \frac{1}{\text{ص}}$ ؛ ص $\neq 0$

- دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتا$\theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ؛ ص $\neq 0$

- في الربع الأول جميع الدوال المثلثية موجبة.

- في الربع الثاني جاθ، قتاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- في الربع الثالث ظاθ، ظتاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- في الربع الرابع جتاθ، قاθ موجبتان وبقية الدوال سالبة.

- إشارة مقلوب دالة مثلثية هي إشارة الدالة المثلثية الأصلية نفسها.

www.samakw.net

(٨-١) دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

www.samakw.net

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة

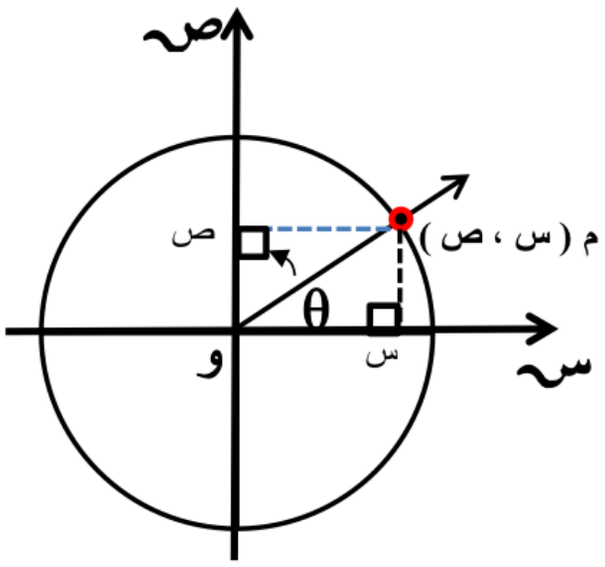
النقطة المثلثية : هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة

ملاحظة : تكون النقطة (س , ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة

النقطة المثلثية : هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة

ملاحظة : تكون النقطة (س , ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

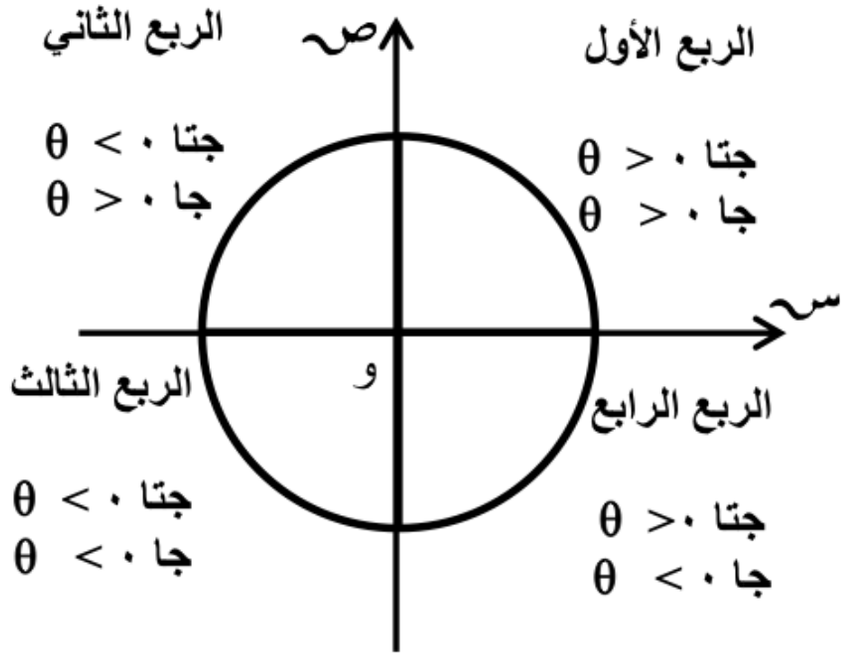


ملاحظة ١: للتحويل من القياس الدائري إلى القياس الستيني نستخدم القانون

$$س^{\circ} = هـ^{د} \times \frac{١٨٠}{\pi}$$

ملاحظة ٢: للتحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري نستخدم القانون : $هـ^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠}$

تدرب معنا



القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$
١٣٥°	$\frac{\pi ٣}{٤}$
−١٨٠°	$-\pi$
−١٥٠°	$\frac{-\pi ٣}{٦}$
−٢٢٥°	$\frac{-\pi ٣}{٤}$
١٥٠°	$\frac{\pi ٣}{٦}$

– العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية:

جا(−θ) = −جاθ؛ جتا(−θ) = جتاθ؛ ظا(−θ) = −ظاθ

جا(π − θ) = جاθ؛ جتا(π − θ) = −جتاθ؛ ظا(π − θ) = −ظاθ

جا(π + θ) = −جاθ؛ جتا(π + θ) = −جتاθ ؛ ظا(π + θ) = ظاθ

$جا\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = جتاθ$؛ $جتا\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = جاθ$

$جا\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = جتاθ$؛ $جتا\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -جاθ$

جا(θ + ٢ك π) = جاθ؛ جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ حيث ك عدد صحيح

حاول أن تحل صـ ٩٦ (١) : أكمل إذا كان :

(أ) جا م = ٠,٣ فإن جا (- م) =

(ب) جتا ل =٠,٣٨ فإن جتا (- ل) =

(ج) ظا س = ٣,١٤ فإن ظا (- س) =

(د) جتا (- ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص =

حاول أن تحل صـ ٩٧ (٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان :

(أ) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ أوجد جا ١٥٠°

(ب) جتا س = $\frac{٤}{٥}$ أوجد جتا (π – س)

(ج) ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ – $\sqrt{٣}$ أوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$

حاول أن تحل صـ ٩٨ (٣) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جتا ٤٠° ≈ ٠,٧٦٦ أوجد جتا ٢٢٠°

حاول أن تحل صـ ٩٨ (٤) : إذا كان جا ٥٦° ≈ ٠,٨٢٩ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°

في التمارين (٧-١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة .

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا(π + θ) = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا(π + θ) = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا(π + θ) = −٥ (أ) (ب)

جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

قا$^{٢}\theta$ = ١ + ظا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قتا$^{٢}\theta$ = ١ + ظتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

تدرب معنا

أ:وليد

حل المعادلة: جتا س = جتا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $-\theta$ + ٢ك π (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

حاول أن تحل صـ ١٠٣ (٦) : حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س = ١

حل المعادلة جتا س = $\frac{١}{٢}$ +

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ صـ)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

حاول أن تحل صـ ١٠٤ (٧) : حل المعادلة : ٢ جا س − ١ = ٠

حل المعادلة ٢ جا س = $+\sqrt{٢}$

حل المعادلة ظا س = ظا θ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

حاول أن تحل صـ ١٠٥ (٨) : حل المعادلة : $\sqrt{٣}$ ظا س = ١

حل المعادلة ظتا س = $\sqrt{٣}$

٢ جا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \text{ ، } \text{ظتا}\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} \text{ ، } \text{ظتا}\theta = \frac{١}{\text{ظا}\theta}$$

$$\text{قا}\theta = \frac{١}{\text{جتا}\theta} \text{ ، } \text{قتا}\theta = \frac{١}{\text{جا}\theta}$$

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $\text{جا}\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظا$\theta = \frac{٣}{٤}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظا$\theta = \frac{٢٤}{٧}$ ، جتا$\theta > ٠$ فأوجد جاθ، جتاθ.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظتا$\theta = \frac{٥}{٨}$، جتا$\theta > ٠$ فأوجد جاθ.

إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ.

إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$ ، جاθ < ٠

أوجد جاθ، ظتاθ.

أثبت صحة المتطابقة: جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س = جتا^{٢}س.

$$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \frac{١}{١ - \text{ظتا}\theta}.$$

$$\text{جا}\theta\ (\text{ظتا}\theta + \text{ظا}\theta) = \text{قا}\theta$$

أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(جاθ + جتاθ)^{٢} – ٢جاθ جتاθ.

(ظا^{٢} θ + ١)جتا^{٢} θ.

أثبت صحّة المتطابقات التالية: جتا^{٤} θ − جا^{٤} θ = جتا^{٢} θ − جا^{٢} θ

$$\text{جتا}\theta + \frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}\theta + ١} = ١$$

$$\text{قتا}\theta = (\text{ظتا}\theta + \text{ظا}\theta)\,\text{جتا}\theta$$

أوجد قيمة كل مما يلي:

قا(−٦٠°) + ظا(٦٠°) − ظتا(٢١٠°) + قتا(٣٠°).

$\text{جتا}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2\,\text{جا}(-\pi) + \text{جتا}(-8\pi) + \text{جا}\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$.

بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

جتا(π − θ) − جتا(− θ) + جا(θ + π) + جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

جا(θ + π) − جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ + جتا(π − θ) + جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

www.samakw.net

(١) قتاθ × جتاθ − ظتاθ = ٠ (أ) (ب)

(٢) ظتا^{٢} (−θ) − قتا^{٢} θ = −١ (أ) (ب)

(٣) (قاθ + ظاθ)(قاθ − ظاθ) = ١ (أ) (ب)

(٤) جاθ قتاθ − جتا^{٢} θ − جا^{٢} θ = ٠ (أ) (ب)

(٥) $\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{١ − جتاθ}}$ − جتاθ = −١ (أ) (ب)

(٦) ظاθ + ظتاθ − قاθ قتاθ = ٠ (أ) (ب)

، اختر الإجابة الصحيحة:

(٧) إذا كانت جتاθ = $-\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جا θ =

(أ) $\frac{-٧}{\sqrt{٧٢}}$ (ب) $\frac{\sqrt{٧٢}}{٧}$

(جـ) $\frac{-\sqrt{٧٢}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{\sqrt{٧٢}}$

(٨) إذا كانت قاθ = $\frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع. فإن ظا θ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥٧}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥٧}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥٧}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥٧}}{٢}$

(١) جتا(−٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ أ ب

(٢) جا(١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ أ ب

(٣) ظا(−١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ أ ب

(٤) قا(٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ أ ب

اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) −٣٢٠° (ب) −٢٧٠°

(جـ) $\frac{\pi ٥}{٣}$ (د) $\frac{\pi ١٣}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{\pi ٧}{٤}$ (ب) ١٣٥°

(جـ) $\frac{\pi ٣}{٤}$ (د) ٢١٥°

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{\pi ١١}{٦}$ (ب) ٢٥٥°

(جـ) $\frac{\pi ٧}{٨}$ (د) $\frac{\pi ٥}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي −٢٢٥°. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (د) (−١، ١)

(٩) [جا(−١٣٥°)]^{٢} + [جتا(−١٣٥°)]^{٢} =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

(١٠) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(−٣٣٠°) (ب) جتا(−٢٤٠°) (جـ) ظتا(−١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(١١) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣٧}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ (جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

(١٢) إن قيمة المقدار قا$(٢\pi - \theta)$ − قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جاθ هي:

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(١٤) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٥) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠°

(جـ) ٣٥٠° (د) ١١٠°

(١٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م$\left(\frac{-\sqrt{٢٧}}{٢}, \frac{\sqrt{٢٧}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥°

(جـ) ١٣٥° (د) ٣٣٠°

أ:وليد

تدرب معنا

(١) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا(π + θ) = ٠,٢ (أ) (ب)

(٢) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا(π + θ) = ٣ (أ) (ب)

(٤) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا(π + θ) = −٥ (أ) (ب)

(٥) إذا كان جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن مجموعة الحل = ∅ (أ) (ب)

(٦) إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

(٧) إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٨) مجموعة حل قا س = ٠,٣ هي ∅ (أ) (ب)

(٩) ظا (١٥π) = صفر (أ) (ب)