مذكرات قلب الأم

www.samaku.net

للصف الثاني عشر

الرياضيات

من غير المعلق

$$\int\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)^2 dx$$

$$=\int\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^2 dx$$

$$=\int 1-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^4}\,dx$$

$$=\int 1-4x^{-2}+4x^{-4}dx$$

$$= x+4x^{-1}-\frac{4}{3}x^{-3}+C$$

$$= x+\frac{4}{x}-\frac{4}{3x^3}+C$$

$$\int\frac{x^2-4x+3}{x-1}\,dx$$

$$=\int\frac{(x-3)\,(x-1)}{(x-1)}\,dx$$

$$=\int(x-3)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-3x+c$$

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx=\int\frac{(x-1)\,(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)\,(\sqrt{x}-1)}\,dx$$

$$=\int\sqrt{x}-1\,dx$$

$$=\int x^{\frac{1}{2}}-1\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$$

$$\int\frac{x^4-27x}{x^2-3x}\,dx=\int\frac{x(x^3-27)}{x(x-3)}\,dx$$

$$=\int\frac{x^3-27}{(x-3)}\,dx$$

$$=\int\frac{(x-3)\,(x^2+3x+9)}{x-3}\,dx$$

$$=\int x^2+3x+9\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+C$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \int\frac{(\sqrt[3]{x}+1)\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)}\,dx$$

$$=\int(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)\,dx$$

$$=\int x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1\,dx$$

$$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x+c$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+x+C$$

$$\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{5}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

$$= 3\int x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= 3\,\tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 5\cdot 9\,x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} - 45\sqrt[3]{x} + C$$

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$$

$u = \frac{1}{x} + 4$

$du = \frac{-1}{x^2}\,dx$

$-du = \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= -\int u^5\,du$$

$$= -\frac{1}{6}u^6 + C$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6 + C$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$$

$u = \sqrt{x} + 2$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$2du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{5\cdot 2}{u^3}\,du$$

$$= 10\int u^{-3}\,du = \frac{10}{-2}u^{-2} + C$$

$$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

$$\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$$

$u = x^3-3x+5$
$du=(3x-3)dx$
$du = 3(x-1)dx$
$\frac{1}{3}du = (x-1)dx$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}\sqrt{u^3}+c$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{x^3-3x+5}dx$$

أوجد: $\int x(2x-1)^3dx$

$u = 2x-1$
$du = 2\,dx$
$dx = \frac{1}{2}du$
$x = \frac{u+1}{2}$

$$= \int \frac{u+1}{2}\ u^3\ \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^4+u^3)\ du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{4}u^4\right)+c$$

$$= \frac{1}{20}(2x-1)^5+\frac{1}{16}(2x-1)^4+c$$

أوجد: $\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$

$u = 3+x^2$
$du = 2x\,dx$
$\frac{du}{2} = x\,dx$
$x^2 = u-3$
$x^4 = (u-3)^2$
$x^4 = u^2-6u+9$

$$= \int x^4\cdot x\sqrt{3+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^2-6u+9)\ u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}}-6u^{\frac{3}{2}}+9u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-6\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+9\,\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)+c$$

$$= \frac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}(x^2+3)^{\frac{5}{2}}+3(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{(3+x^2)^7}-\frac{6}{5}\sqrt{(x^2+3)^5}+3\sqrt{(x^2+3)^3}+c$$

$$\int x(x+1)^5 dx$$

$u = x+1$

$du = dx$

$x = u-1$

$$\int (u-1)u^5 \, du$$

$$= \int (u^6 - u^5)\, du$$

$$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{6}u^6 + C$$

$$= \frac{1}{7}(x+1)^7 - \frac{1}{6}(x+1)^6 + C$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx = \int x^3 x^2 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$$

$u = x^3+1$

$du = 3x^2\, dx$

$\frac{1}{3}du = x^2\, dx$

$x^3 = (u-1)$

$$= \frac{1}{3}\int (u-1)\, u^{\frac{1}{3}}\, du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt[3]{(x^3+1)^7} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3+1)^4} + C$$

$$\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5\sin 3x\right) dx$$

$$= \frac{1}{x} + -\frac{5}{3}\cos 3u + C$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{5}{3}\cos 3x + C$$

أوجد :

$$\int (x^2 + \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

أوجد:

$$\int x \sec^2(x^2+2)\, dx$$

$u = x^2+2$

$du = 2x\, dx$

$\frac{du}{2} = x\, dx$

$$= \int \sec^2(u)\, \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\tan(u)) + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan(x^2+2) + C$$

$$\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$$

$u = \tan x$
$du = \sec^2 x \, dx$

$\int u \, du$
$= \frac{1}{2}u^2 + C$
$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

$$\int \underset{u^5}{\sin^5(x+1)} \cdot \underbrace{\cos(x+1)dx}_{du}$$

$u = \sin(x+1)$
$du = \cos(x+1)\,dx$

$\int u^5 \, du = \frac{1}{6}u^6 + C$
$= \frac{1}{6}(\sin(x+1))^6 + C$

$$\int (3+\sin 2x)^5 \underbrace{\cos 2x \, dx}_{\frac{1}{2}du}$$

$u = 3 + \sin 2x$
$du = 2\cos 2x \, dx$
$\frac{1}{2}du = \cos(2x)\,dx$

$\int u^5$
$= \frac{1}{6}u^6 + C$
$= \frac{1}{6}(3+\sin 2x)^6 + C$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$u = \cos x$
$du = -\sin x \, dx$
$-du = \sin x \, dx$

$= \int \sin x \cos^{-3} x \, dx$
$= \int u^{-3} \, du$
$= -\frac{1}{2}u^{-2} + C = -\frac{1}{2(\cos x)^2} + C$

$$\int \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,dx$$

$u = 1+\sin x$

$du = \cos x\,dx$

$$= \int (1+\sin x)^{\frac{1}{2}}\cos x\,dx$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$$

$u = \cot x$

$du = -\csc^2 x\,dx$

$-du = \csc^2 x\,dx$

$$= -\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{3}(\cot x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(\cot x)^3} + C$$

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$$

$u = 1+\tan x$

$du = \sec^2 x\,dx$

ملاحظة: $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

$$= \int (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}\sec^2 x\,dx$$

$$= \int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1+\tan x} + C$$

أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

$= -\int \csc^4 x \cdot \csc x \cdot \cot x \, dx$

$= -\int u^4 \, du$

$= -\frac{1}{5}u^5 + C = \frac{-1}{5}(\csc x)^5 + C$

$u = \csc x$

$du = -\csc x \cdot \cot x \, dx$

$-du = \csc x \cdot \cot x \, dx$

أوجد $\frac{dy}{dx}$.

$y = e^{\csc x}$ $y' = -\csc x \cdot \cot x \; e^{\csc x}$	$y = 5^{\sqrt{x+1}}$ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 5^{\sqrt{x+1}} \cdot \ln(5)$
$y = \ln(\ln x)$ $y' = \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$	$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) - \ln(x^2)$ $= 0 - 2\ln x$ $= \frac{-2}{x}$
$y = 8^{\tan x}$ $y' = \sec^2 x \cdot 8^{\tan x} \cdot \ln(8)$	$y = \ln(2 - \cos x)$ $y' = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$

$$\int (2x+1)e^{x^2+x+4}dx$$

$u = x^2+x+4$
$du = (2x+1)\,dx$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$= e^{x^2+x+4} + C$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$u = e^x+1 \quad , \quad du = e^x\,dx$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|e^x+1| + C$$

$$= \ln(e^x+1) + C$$

$$\int (\cot x + x^2)dx$$

$u = \sin x$
$du = \cos x\,dx$

$$= \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} + x^2\right)dx$$

$$= \int \frac{du}{u} + \int x^2\,dx$$

$$= \ln|u| + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$= \ln|\sin x| + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$$

$u = x^4 - 2x^2$
$du = 4x^3 - 4x\,dx$
$du = 4(x^3-x)\,dx$
$\frac{1}{4}du = (x^3-x)\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x^4-2x^2| + C$$

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx$

$-du = \sin x\, dx$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x| + C$$

$\int x\cos x\, dx$ أوجد:

$u = x$, $dv = \cos x\, dx$

$du = dx$, $v = \sin x$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

$\int 3x e^{2x+1}\, dx$

$u = 3x$, $dv = e^{2x+1}\, dx$

$du = 3\, dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

$$\int u\, dv = u.v - \int v\, du$$

$$\int 3x\, e^{2x+1}\, dx = \frac{3}{2}x\, e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}x\, e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$$

$\int (x-3)e^{x-3}\, dx$

$u = (x-3)$, $dv = e^{x-3}\, dx$

$du = dx$, $v = e^{x-3}$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int (x-3)\, e^{x-3}\, dx = (x-3).e^{x-3} - \int e^{x-3}\, dx$$

$$= (x-3)\, e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

$\int x \ln x \, dx$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = x \, dx$

$du = \frac{1}{x} dx$ $\quad v = \frac{1}{2}x^2$

$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} \cdot x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}\int x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

أوجد: $\int x^2 \sin x \, dx$

$u = x^2$ $\quad dv = \sin x \, dx$

$du = 2x \, dx$ $\quad v = -\cos x$

$\int u \, dv = u v - \int v \, du$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$u = 2x$ $\quad dv = \cos x \, dx$

$du = 2 \, dx$ $\quad v = \sin x$

$$= -x^2 \cos x + \left[2x \sin x - 2\int \sin x \, dx\right]$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

أوجد: $\int x^2 e^{x+2}\,dx$

$u = x^2 \qquad dv = e^{x+2}\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = e^{x+2}$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x^2 e^{x+2}\,dx = x^2 e^{x+2} - \int 2x\, e^{x+2}\,dx$$

$u = 2x \qquad dv = e^{x+2}\,dx$

$du = 2\,dx \qquad v = e^{x+2}$

$$= x^2 e^{x+2} - \left[2x\, e^{x+2} - \int 2\, e^{x+2}\,dx\right]$$

$$= x^2 e^{x+2} - 2x e^{x+2} + 2\, e^{x+2} + C$$

$\int (x^2 - 2x)\cos x\,dx$

$u = (x^2 - 2x) \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = (2x-2)\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$$\int (x^2-2x)\cos x\,dx = (x^2-2x)\cdot \sin x - \int (2x-2)\sin x\,dx$$

$u = 2x-2 \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = 2\,dx \qquad v = -\cos x$

$$= (x^2-2x)\sin x - \left[-(2x-2)\cos x + \int 2\cos x\,dx\right]$$

$$= (x^2-2x)\sin x + (2x-2)\cos x - 2\sin x + C$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = \frac{1}{x^2}dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = -\frac{1}{x}$

$$\int u\,dv = uv - \int u\,dv$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x) + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x) = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} + C$$

$$I = \int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\ln(x)\,dx$$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = x^{-\frac{1}{3}}dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$$\int u\,dv = uv - \int u\,dv$$

$$I = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln(x) - \int \frac{3}{2}\,\frac{1}{x}\,x^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln(x) - \frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln(x) - \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$

$$\int x^2\ln x^2\,dx = \int 2x^2\ln(x)$$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = 2x^2$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{2}{3}x^3$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2\ln(x^2)\,dx = \frac{2}{3}x^3\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3\ln(x) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3\ln(x) - \frac{2}{9}x^3 + C$$

$$\int x\cos(3x)\,dx$$

$u = x \qquad dv = \cos(3x)\,dx$

$du = dx \leftarrow \qquad v = \frac{1}{3}\sin(3x)$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \frac{1}{3}\,x\,\sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\,x\,\sin(3x) - \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{3}\cos(3x) + C$$

$$= \frac{1}{3}\,x\,\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$$

أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)dx$.

$$f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-3}$$

$$2 = A(x-3) + B(x-5)$$

$x = 3 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$

$x = 5 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

الكسور الجزئية

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-5| - \ln|x-5| + C$$

لتكن الدالة f : $$f(x)=\frac{2}{x^2-4x+3}$$

فأوجد :

(1) الكسور الجزئية

(2) $\int f(x)dx$

$$f(x)=\frac{2}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$

$$2=A(x-1)+B(x-3)$$

$$\boxed{x=1}\Rightarrow 2=-2B\Rightarrow B=-1$$

$$\boxed{x=3}\Rightarrow 2=2A\Rightarrow A=1$$

الكسور الجزئية $f(x)=\frac{1}{x-3}+\frac{-1}{x-1}$

② $$\int f(x)\,dx=\int \frac{1}{x-3}+\frac{-1}{x-1}\,dx$$

$$=\ln|x-3|-\ln|x-1|+C$$

لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

ⓐ $$f(x)=\frac{2x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$

بالضرب في $(x-3)(x-1)$ $$2x-1=A(x-1)+B(x-3)$$

$\boxed{x=1}$ $\Rightarrow$ $1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

$\boxed{x=3}$ $\Rightarrow$ $5=2A \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

$$f(x)=\frac{\frac{5}{2}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}$$ الكسور الجزئية

ⓑ $$\int f(x)\,dx=\int\frac{\frac{5}{2}}{(x-3)}+\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}\,dx$$

$$=\frac{5}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

$$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$$

$$f(x) = \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$-x^2+2x+4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$x=0 \Rightarrow 4 = 4A + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$x=2 \Rightarrow 4 = 2C \Rightarrow \boxed{C=2}$$

$$\boxed{x=1} \Rightarrow -1+2+4 = 1(1-2)^2 + B(1)(1-2) + 2(1)$$

$$5 = 1 - B + 2 \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

أوجد: $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2-4x+4 \overline{\smash{)}\,x^2-3x+7} \\ -\,x^2 \mp 4x \pm 4 \\ \hline x+3 \end{array}$$

$$f(x) = 1 + \frac{x+3}{x^2-4x+4}$$

$$g(x) = \frac{x+3}{x-4x+4} = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$x+3 = A(x-2)+B$$

$$x=2 \Rightarrow \boxed{5 = B}$$

$$x=0 \Rightarrow 3 = -2A+5 \Rightarrow -2=-2A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$f(x) = 1 + \frac{+1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

$$\int f(x)\,dx = \int 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+9}\,dx$$

$$= \int 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= x + \int \frac{9x-7}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= x + \int \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= x + \frac{9}{x-3} - \frac{20}{(x-3)}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2-6x+9 & x^2+3x+2 \\ & -x^2 \overset{+}{-}6x \overset{-}{+}9 \\ \hline & 9x-7 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A(x-3) + B$$

$$x = 3 \Rightarrow \boxed{20 = B}$$

$$x = 0 \Rightarrow -7 = -3A + 20$$

$$-3A = -7-20$$

$$\boxed{A = 9}$$

$$\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx = \left[3e^x + e\ln|x|\right]_1^2$$

$$= 3e^2 + e\ln(2) - 3e - e\ln(1)$$

$$= 3e^2 + e\ln(2) - 3e$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\csc^2 x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\cos(2x)+\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

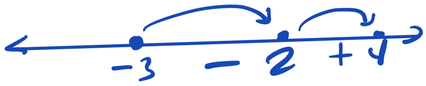
$$=\left(-\frac{1}{4}\cos(\pi)+\cot\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(+\frac{1}{4}+0\right)-(0+1)=-\frac{3}{4}$$

$$\int_{-3}^{4}|2x-4|\,dx$$

$2x-4=0$

$x=2$



$$=-\int_{-3}^{2}(2x-4)\,dx+\int_{2}^{4}(2x-4)\,dx$$

$$=\left(-x^2+4x\right)_{-3}^{2}\oplus\left(x^2-4x\right)_{2}^{4}$$

$$=(-4+8)-(-9-12)\oplus(16-16)-(4-8)$$

$$=4+21+4=29$$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx \leqslant 0$

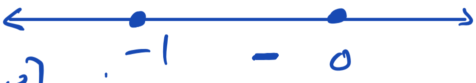
نفرض $f(x) = x^2 + x$

* f كثيرة حدود متصلة على R ∴ متصل على $[-1, 0]$

* ندرس اشارة $f(x)$ ∴ $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

∴ $x = 0$, $x = -1$

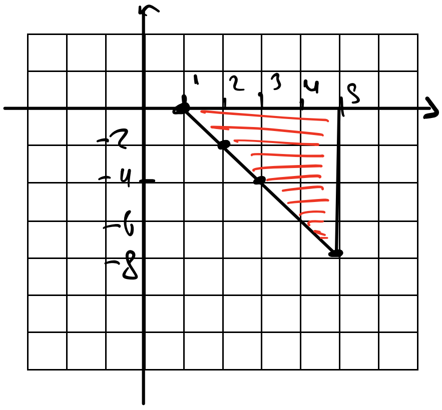


∴ $f(x) = x^2 + x \leqslant 0 \quad \forall x \in [-1, 0]$

∴ $\int f(x)dx = \int x^2 + x \, dx \geqslant 0$

أوجد قيمة $\int_{1}^{5}(2-2x)dx$ بيانيًّا.

x	$y = 2-2x$
1	0
3	-4
5	-8



$\int_{1}^{5}(2-2x)dx = -$ مساحة المثلث
$= -16$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}bh$
$= \frac{1}{2}4(8)$
$= 16$ وحدة مربعة

$$\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{9\pi}{4}$$

$$y = -\sqrt{9-x^2}$$

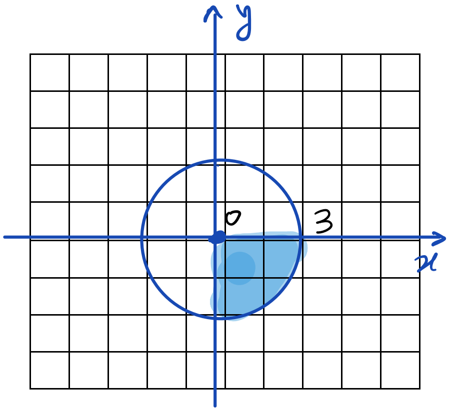
$$y^2 = 9-x^2$$

$$x^2+y^2 = 9$$

معادلة دائرة مركزها (0,0)

وطول نصف قطرها

$$r = 3$$



$$\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$$

$$= \frac{25\pi}{2}$$

$$y = \sqrt{25-x^2}$$

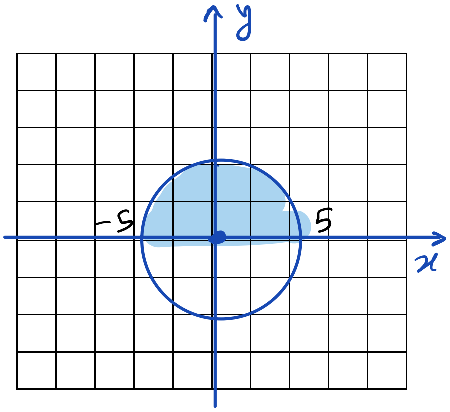
$$y^2 = 25-x^2$$

$$x^2+y^2 = 25$$

معادلة دائرة مركزها (0,0)

وطول نصف قطرها

$$r = 25$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx$$

$$u = \tan x$$

$$du = \sec^2 x\,dx$$

$$x = 0 \Rightarrow u = \tan(0) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$= \int_0^1 u\,du$$

$$= \left(\frac{u^2}{2}\right)_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$$

$u = x+1$
$du = dx$
$x = u-1$
$x = 0 \Rightarrow u = 1$
$x = 1 \Rightarrow u = 4$

$$= \int_1^4 (u-1)\, u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int_1^{4} u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left(\frac{-4}{15}\right) = \frac{116}{15}$$

أوجد: $\int_{-2}^0 \frac{x}{e^x}\,dx$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\,dx$
$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$= \int_{-2}^0 x\, e^{-x}\, dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_{-2}^0 x\, e^{-x}\, dx = \left(-x\, e^{-x}\right)_{-2}^0 + \int_{-2}^0 e^{-x}\, dx$$

$$= \left(-x\, e^{-x} - e^{-x}\right)_{-2}^0 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 - 1$$

أوجد: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$
$du = dx \qquad v = \tan x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = (x\tan x)_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

$$= \left[x\tan x + \ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4}(1) + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - (0) = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= -\ln|\cos x| + c$$

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$$

$u = \ln(x)$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$x = 1 \Rightarrow u = \ln(1) = 0$

$x = e \Rightarrow u = \ln(e) = 1$

$$\int_0^1 u^6\,du$$

$$= \left(\frac{u^7}{7}\right)_0^1 = \frac{1}{7} - 0$$

$$= \frac{1}{7}$$

$$\int_e^6 \frac{dx}{x\ln x} =$$

$u = \ln(x)$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$x = e \Rightarrow u = \ln(e) = 1$

$x = 6 \Rightarrow u = \ln(6)$

$$\int_1^{\ln 6} \frac{du}{u} = (\ln|u|)_1^{\ln(6)}$$

$$= \ln(\ln(6)) - 0$$

$$= \ln(\ln(6))$$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

$$A = \left| \int_{-4}^{-1} x^2 + 5x + 4 \, dx \right|$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$
$$(x+4)(x+1) = 0$$
$$x = -4 \quad , \quad x = -1$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 4x \right)_{-4}^{-1} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{-1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{80}{3} - 16 \right) \right| = \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المحددة:

$f(x) = x^3 - 6x \ , \ [0,3]$

$$x^3 - 6x = 0$$
$$x(x^2 - 6) = 0$$
$$x = 0 \qquad x = \mp \sqrt{6}$$

$$A = \left| \int_0^{\sqrt{6}} x^3 - 6x \, dx \right| + \left| \int_{\sqrt{6}}^{3} x^3 - 6x \, dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2 \right)_0^{\sqrt{6}} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2 \right]_{\sqrt{6}}^{3} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{\sqrt{6}^4}{4} - 3(\sqrt{6}) \right) - (0) \right| + \left| \left(\frac{3^4}{4} - 3(3)^2 \right) - \left(\frac{\sqrt{6}^4}{4} - 3\sqrt{6}^2 \right) \right|$$

$$= 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$$ وحدة مربعة

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=-1-x^2$

والمستقيمين $x=3$, $x=0$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

$g(x) \neq f(x)$

$$A=\left|\int_0^3 f(x)-g(x)\,dx\right| = \left|\int_0^3 e^x+1+x^2\,dx\right|$$

$$=\left|\left(e^x+x+\frac{x^3}{3}\right)_0^3\right|$$

$$=\left|\left(e^3+3+\frac{3^3}{3}\right)-\left(e^0+0\right)\right|$$

$$=\left|e^3+3+9-1\right| = e^3+11$$ وحدة مربعة

SAMA سما

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2=-2x+5$, $y_1=x^2+2$

$y_1=y_2 \Rightarrow x^2+2=-2x+5$

$x^2+2x+2-5=0$

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=3$ or $x=-1$

$$A=\left|\int_{-1}^3 y_1-y_2\,dx\right| = \left|\int_{-1}^3 x^2+2x-3\,dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)_{-1}^3\right|$$

$$=\left|\left(\frac{3^3}{3}+3^2-3(3)\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2-3(-1)\right)\right|$$

$$=\left|(9+9-9)-\left(\frac{-1}{3}+1+3\right)\right| = \frac{16}{3}$$ وحدة مربعة

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = x$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، والمستقيم $x = 2$ ومحور السينات.

$f(x) = g(x) \quad \therefore \frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x^3 = 1$

$\therefore x = 1$

$$A = \left| \int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$A = \left| \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right)dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)_1^2 \right|$$

$$= \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$y = \sqrt{r^2 - x^2} = 0 \Rightarrow x = \mp r$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2}\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left[\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right)\right]$$

$$= \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right)$$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ وحدة مكعبة

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0, h]$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^h r^2 \, dx \qquad = \pi (r^2 x)_0^h$$

$$= \pi (r^2 h - r^2(0))$$

$$= \pi r^2 h$$ وحدة مكعبة

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين g : $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$

$$x^2 = \sqrt{x}$$ قص

$$\therefore x^4 = x \quad \Rightarrow \quad x^4 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad or \quad x = 1$$

$$x \in (0,1) \quad \therefore x = \frac{1}{4} \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$V = \pi \int_0^1 g^2(x) - f^2(x) \, dx = \pi \int_0^1 x - x^4 \, dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right)_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi$$ وحدة مكعبة

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \ , \ g(x) = \frac{x}{2} + 2$

$x-2$

فض $f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$

$$x^2 + 2 = x + 4$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ x = -1 \end{matrix}}$$

$$x = 0 \in [-1, 2] \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(0) = 1 \\ g(0) = 2 \end{matrix}\right) \therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} g^2(x) - f^2(x) \, dx = \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{4} + 2x + 4 - \frac{x^4}{4} - x^2 - 1 \, dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} -\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 3 \, dx$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{20} - \frac{1}{4}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^{2} = \pi$$

$$= \pi \left[\left(-\frac{32}{20} - \frac{1}{4}(2)^3 + 4 + 6 \right) - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + 1 - 3 \right) \right] = \frac{81}{10}\pi$$ وحدة مكعبة

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3 \ , \ y_2 = x^2 + 1$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} y_1^2 - y_2^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^2 - (x^2+1)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} -x^4 - x^2 + 6x + 8 \, dx$$

$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right)_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left[\left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 3(4) + 16 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 \right) \right]$$

$$= \frac{117}{5} \pi$$

$y_1 = y_2$

$x^2 + 1 = x + 3$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$ or $x = -1$

$x = 0 \in (-1, 2)$

$y_1(0) = 3$

$y_2(0) = 1$

$\therefore y_1 \geq y_2 \geq 0$

$\forall x \in [-1, 2]$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0 , 6]$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} (3+2x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = (3+2x)^{\frac{1}{2}}$

$f'^2(x) = 3+2x$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^6 \sqrt{1+3+2x}\, dx$$

$$= \int_0^6 (4+2x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (4+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{3}(4+2(6))^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(4)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{56}{3}$$ وحدة طول

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0 , \frac{1}{3}\right]$.

$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$f'^2(x) = 9x$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} (1+9x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$L = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} (1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{2}{27} (1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{27}\left[\left(1+9\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{14}{27}$$ وحدة طول

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{5}{2}\right)$

$$f'(x) = \cos 2x$$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx$$

$$f(x) = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\left.\begin{matrix} x = -\frac{\pi}{4} \\ y = \frac{5}{2} \end{matrix}\right) \therefore \quad \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{-\pi}{4}\right) + C$$

$$\frac{5}{2} = \frac{-1}{2} + C \Rightarrow \quad C = 3$$

$$\therefore \boxed{f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) + 3}$$

وجد معادلة منحنى الدالة

$$0 \neq \text{ميل العمودي}$$

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5, 3)$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\text{ميل العمودي}} dx$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}} dx = -\int (5-4x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$f(x) = -2 \cdot \frac{-1}{4} (5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$f(x) = +\frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + C$$

$$A(-5, 3) \Rightarrow \quad 3 = \frac{1}{2} \sqrt{5-4(-5)} + C$$

$$3 = \frac{5}{2} + C \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}}$$

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x+5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2,3)$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\text{ميل العمودي}}\, dx$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x+5}\, dx =$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2} \ln|2x+5| + C}$$

$$\left.\begin{matrix} x = -2 \\ y = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 = -\frac{1}{2} \ln|2(-2)+5| + C$$

$$3 = -\frac{1}{2} \ln(1) + C \Rightarrow C = 3$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2} \ln|2x+5| + 3}$$

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

$$y' = 2x\, e^{x^2}$$

الطرف الأيسر $= y' - 2xy$

$= 2x\, e^{x^2} - 2x\, e^{x^2}$

$= 0$

$=$ الطرف الأيمن

$\therefore$ $y = e^{x^2}$ حل للمعادلة

حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ فصل المتغيرات

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + c$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c$$

$$|y| = e^{\ln(x^2)} \cdot e^c$$

$$|y| = e^c \cdot x^2$$

$$y = \mp e^c \cdot x^2$$

نعرف $k = \mp e^c$

∴

$$\boxed{y = kx^2}$$

سما SAMA

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

$a = 4$ ∴ $y = ay$

∴ حلوله $y = ke^{ax}$

$$\therefore \boxed{y = ke^{4x}}$$

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 = k(e^0) \Rightarrow k = 2$

$$\boxed{y = 2e^{4x}}$$

حل المعادلة

حل المعادلة $3y' - 2y = 4$، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

$3y' = 2y + 4 \quad \div 3$

$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

$a = \frac{2}{3} \ , \ b = \frac{4}{3} \Leftarrow$

وهي من الشكل $y' = ay + b$ وحلها $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

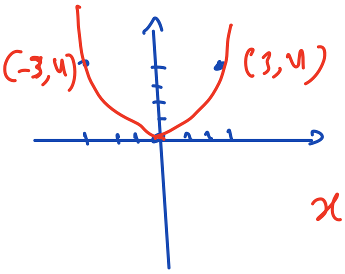
$\therefore \ y = k e^{\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$

$$\boxed{y = k e^{\frac{2}{3}x} - 2}$$

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 3 \end{matrix}\right) \Rightarrow 3 = k e^{0} - 2 \Rightarrow 3 + 2 = k \Rightarrow k = 5$

$\therefore \ y = 5 e^{\frac{2}{3}x} - 2$ حل المعادلة

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $B(3,4)$, $A(-3,4)$.



$\because$ رأس القطع هو $(0,0)$

محور تماثل القطع هو y - axis

$\therefore$ تكون معادلة القطع هي $x^2 = 4py$

$B(3,4) \in$ للقطع $\therefore \ 3^2 = 4p(4)$

$9 = 16p \Rightarrow p = \frac{9}{16}$

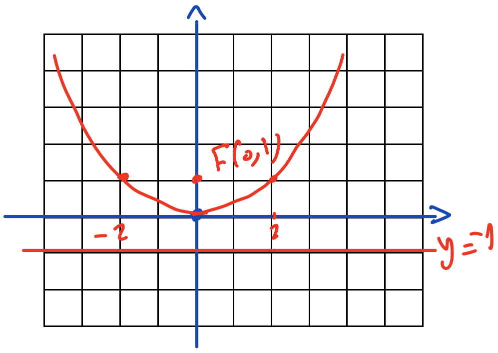
$\therefore \ x^2 = 4\left(\frac{9}{16}\right) y$

$$\boxed{x^2 = \frac{9}{4} y}$$

وهي معادلة القطع المكافئ

أوجد البؤرة، والدليل، وخط تماثل القطع المكافئ. ارسم تخطيطاً للرسم البياني للقطع المكافئ.

المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$



$x^2 = 4y$

معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل

وخط تماثل هو y - axis

$x^2 = 4py$

$x^2 = 4y$

$\therefore \quad 4p = 4$

$\therefore \quad p = 1 > 1$ ↑

البؤرة $F(0, p) = F(0, 1)$

الدليل $y = -p$

$y = -1$

نأخذ نقطة مساعدة للرسم $y = 1$

$\Rightarrow \quad x^2 = 4(1)$

$x = \mp 2$

$\therefore \quad (\mp 2, 1) \in$ للقطع

تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$، فأين يجب وضع لمبة المصباح

يكون موضع لمبة المصباح في البؤرة $y^2 = 12x$

معادلة قطع مكافئ رأسه (0,0) وخط تماثله هو محور السينات

$y^2 = 4px$

$\therefore 4p = 12 \Rightarrow \boxed{p = 3}$

$\therefore$ البؤرة $F(p,0) = F(3,0)$

$\therefore$ موضع اللمبة في البؤرة $F(3,0)$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

$V_1F_1 + V_1F_2 = 10$، حيث إنّ V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_2 و F_1 هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$.

حسب تعريف القطع الناقص يكون $V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$

$\therefore 2a = 10 \Rightarrow a = 5$

$\because$ البؤرتين على محور السينات $\therefore$ المحور الأكبر للقطع ينطبق على محور السينات

$\therefore$ تكون المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\boxed{c = 3}$, $\boxed{a = 5}$

$c^2 = a^2 - b^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 25 - 9 = 16$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

وهي معادلة القطع الناقص ومركزه (0,0)

إذا كانت: $1 = \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4}$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

- a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.
- b البؤرتين.
- c معادلة دليلي القطع.
- d طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

مركز القطع (0,0)

المحور الأكبر للقطع ينطبق على محور الصادات

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$= 9 - 4 = 5$

رأسي القطع $A_1(0,-a) = A_1(0,-3)$

$A_2(0,+a) = A_2(0,3)$

طرفي المحور الأصغر $B_1(-b,0) = B_1(-2,0)$

$B_2(b,0) = B_2(2,0)$

البؤرتين $F(0, \mp c)$

$F(0, \mp\sqrt{5})$

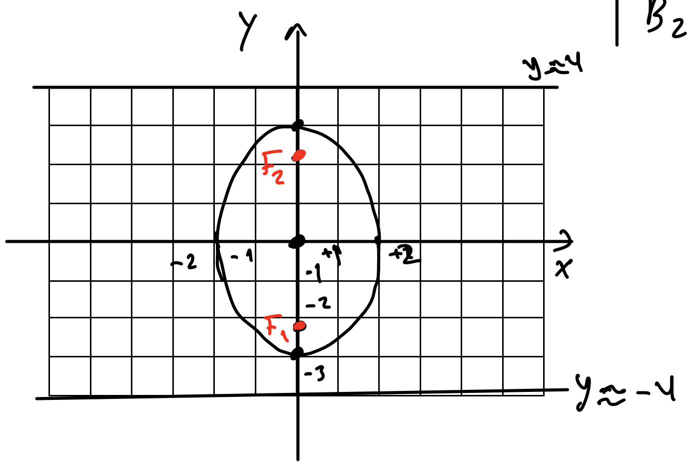
معادلة دليلي القطع الناقص

$y = \mp \frac{a^2}{c} = \mp \frac{9}{\sqrt{5}}$

d وحدة طول

طول المحور الأكبر $= 2a = 2(3) = 6$

طول المحور الأصغر $= 2b = 2(2) = 4$



أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2 + 4y^2 = 16$

الحل

مركز القطع $(0,0)$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

محور القطع الأكبر ينطبق على السينات

$a^2 = 16$

$b^2 = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$

$a = 4$ $b = 2$ $c = 2\sqrt{3}$

البؤرتان $F(\mp c, 0) = F(\mp 2\sqrt{3}, 0)$

الرأسين $A(\mp a, 0)$

$A(\mp 4, 0)$

طول المحور الأكبر $= 2a$

$= 2(4)$

$= 8$ وحدة طول

أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0, 0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm.

المركز $(0,0)$ والمحور الأكبر ينطبق على المحور الصادي

طول المحور الأكبر $= 2a = 16 \Rightarrow a = 8$

المسافة بين البؤرتين $= 2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$\therefore c^2 = a^2 - b^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

$= 64 - 25$

$= 39$

$\because$ المحور الأكبر ينطبق على الصادات $\therefore$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{39} = 1$$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F_1\ (-5\ ,0)$

ورأساه $A_1\ (-3\ ,0)\ ,\ A_2\ (\ 3\ ,0)$ ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين

(٠،٠) مركز القطع الزائد ، المحور القاطع للقطع ينطبق على محور السينات

$A(\mp3,0) \Rightarrow \boxed{a=3}$

$F(-5,0) \Rightarrow \boxed{c=5}$ $\quad c^2=a^2+b^2$

$25=9+b^2$

$\boxed{b=4} \Leftarrow b^2=25-9=16$

∴ معادلة القطع $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

المقارب $y=\mp\dfrac{b}{a}x$

∴ $y=\mp\dfrac{4}{3}x$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (0 , 0) وإحدى بؤرتيه $F_1(0,-\sqrt{5})$

ومعادلة أحد خطيه المقاربين $.y=2x$

مركز القطع (٠،٠)

والمحور القاطع للقطع ينطبق على محور الصادات حيث $F(0,-\sqrt5)$

$c=5$

∴ معادلة القطع

$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

المقارب ∴ $y=\dfrac{a}{b}x$

$y=2x$ ∴

$2=\dfrac{a}{b}$

∴ $a=2b$

$c^2=a^2+b^2$

$\sqrt5^2=(2b)^2+b^2$

$5=5b^2$

$\Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=1$

∴ $a=2b$

$a=2(1)=2$

∴ معادلة القطع هي

$\boxed{\dfrac{y^2}{4}-x^2=1}$

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد، أوجد:

- ⓐ رأسي القطع الزائد.
- ⓑ البؤرتين.
- ⓒ معادلتي دليلي القطع.
- ⓓ طول كل من المحورين.
- ⓔ معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

مركز القطع (0,0) ، والمحور القاطع ينطبق على محور السينات

$a^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a=4}$

$b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$c^2 = a^2+b^2$

$= 16+9 = 25 \Rightarrow \boxed{c=5}$

ⓐ رأسي القطع

$A_1(a,0) = (4,0)$

$A_2(-a,0) = (-4,0)$

ⓑ بؤرتي القطع

$F_1(c,0) = F_1(5,0)$

$F_2(-c,0) = F_2(-5\ 0)$

ⓒ معادلة دليل القطع

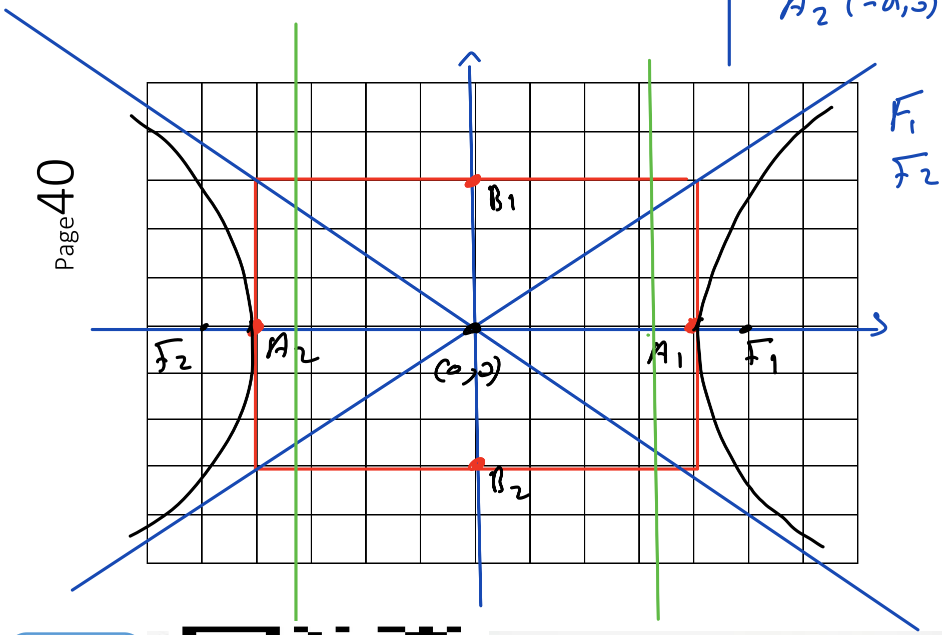
$x = \mp \frac{a^2}{c}$

$x = \mp \frac{16}{5}$

معادلة المقاربين

$y = \mp \frac{b}{a} x$

$y = \mp \frac{3}{4} x$



أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وأحد رأسيه $(-4,0)$ ويمر بالنقطة $(5,-2)$.

مركز القطع $(٠,٠)$

∴ أحد رأسي القطع $(-4,٠)$

∴ $a = 4$

والمحور القاطع للقطع ينطبق على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

النقطة $(5,-2)$ تقع على القطع

∴ $$\frac{5^2}{4^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1$$

∴ $$\frac{4}{b^2} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

∴ $$b^2 = \frac{64}{9}$$

∴ معادلة القطع الزائد هي

$$\frac{x^2}{16} - \frac{9y^2}{64} = 1$$

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

a اختلافه المركزي $\left(e = \frac{1}{2}\right)$ وإحدى بؤرتيه: $F(2,0)$

b اختلافه المركزي $(e = 2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x = 1$

ⓐ $e = \frac{1}{2} < 1$ ∴ هو قطع ناقص

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2c}$$

∴ $F(2,٠)$ هي إحدى البؤرتين

∴ $C = 2$ ، المحور الأكبر للقطع ينطبق على السينات

∴ $$a = 2(2) = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

∴ معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$ حيث مركزه $(٠,٠)$

ⓑ $e = 2 > 1$ ∴ هي معادلة لقطع زائد

$$\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow \boxed{C = 2a} \quad ①$$

∴ معادلة الدليل $x = 1$

$$= \frac{a^2}{c} \Rightarrow \boxed{\frac{a^2}{c} = 1} \quad ②$$

والمحور القاطع ينطبق على السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

من ① ، ②

$$\frac{a^2}{2a} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

∴ $$C = 2(2) = 4$$

∴ $$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

$24y^2 = 600 + 25x^2$ ⇐ $\frac{24y^2}{600} - \frac{25x^2}{600} = \frac{600}{600}$

$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$ وهي معادلة قطع زائد

$a^2 = 25$, $b^2 = 24$

$c^2 = a^2 + b^2 = 24 + 25 = 49$

$\therefore \boxed{c = 7}$, $\boxed{a = 5}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5} = 1.4 > 1$

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

$2b =$ طول المحور الأصغر

$2b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$\because e = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{c}{a}$

$\boxed{c = \frac{\sqrt{5}}{3} a}$

$\because c^2 = a^2 - b^2$

$\left(\frac{\sqrt{5}a}{3}\right)^2 = a^2 - (2)^2$

$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$

$4 = a^2 - \frac{5}{9}a^2 \Rightarrow 4 = \frac{4}{9}a^2$

$\therefore a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

∴ طول المحور الأكبر المطلوب $= 2a$

$2a = 2(3) = 6$ وحدة طول

1	$F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$	✓
2	$\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$	✓
3	$\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5\,dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$	✓
4	إذا كانت: $F(0) = 400$, $F(x) = \int (3x^2-12x+15)\,dx$ ، فإن: $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$	✗
5	$(F'(x) = \sec x \tan x\ ,\ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$	✓
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$	✗
7	$\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$	✗
8	إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$	✗
9	$\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \ln(3x+1) + C$	✗
10	إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$	✗
11	$\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$	✓
12	$\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$	✓
13	$\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$	✓
14	$\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln\lvert x+3\rvert + 2\ln\lvert x\rvert + C$	✗
15	$\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln\lvert x+3\rvert + \ln\lvert x+7\rvert + C$	✗

16	الدالة: $f(x)=\frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-3}$	✓
17	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2x\,dx=\frac{\pi}{2}$	✓
18	$\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx-\int_5^2 f(x)\,dx=0$	✗
19	$\int_{-1}^{1}(\mid x\mid)^3dx=-\frac{1}{2}$	✗
20	$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx=1$	✗
21	مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=b$, $x=a$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$	✗
22	إذا كان: $x=-1$, $y=-5$, $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي: a $-\frac{x^2}{3}-\frac{14}{3}$ b $3x^{\frac{1}{3}}+2$ [✓ c] $3x^{\frac{1}{3}}-2$ d $3x^{\frac{1}{3}}$	
23	$\int\left(\frac{x^2-4x+4}{x-2}+2\right)^2dx=$ a x^2+C b $2x+C$ c $\frac{x^2}{2}+2x+C$ [✓ d] $\frac{1}{3}x^3+C$	
24	$\int x(x^2+2)^7dx=$ [✓ a] $\frac{1}{16}(x^2+2)^8+C$ b $\frac{1}{4}(x^2+2)^8+C$ c $\frac{1}{12}(x^2+2)^6+C$ d $\frac{1}{3}(x^2+2)^6+C$	
25	إذا كانت $F(x)=\int(x+1)(2x^2+4x-1)dx$ ، $F(-2)=\frac{9}{8}$ ، فإن: $F(x)$ تساوي: a $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+\frac{5}{4}$ [✓ b] $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+1$ c $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2+1$ d $4(2x^2+4x-1)^2-1$	

26

$$\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx =$$

ⓐ $x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$

[✓ ⓑ] $4x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$

ⓒ $x^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}}+C$

ⓓ $4x^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}}+C$

27

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx =$$

ⓐ $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

ⓑ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+C$

[✓ ⓒ] $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

ⓓ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2\sqrt{x+1}+C$

28

إذاكانت $y_{\theta=0}=-3$ ، $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ فإنّ y تساوي:

ⓐ $-\cos\theta$

ⓑ $2-\cos\theta$

[✓ ⓒ] $-2-\cos\theta$

ⓓ $4-\cos\theta$

29

إذا كانت $y=x^2e^x-x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

[✓ ⓐ] $e^x(x^2+x-1)$

ⓑ $e^x(x^2-x)$

ⓒ $2x\,e^x-e^x$

ⓓ $e^x(x^2+2x+1)$

30

$$\int \sqrt[3]{\cot x}\,\csc^2 x\,dx =$$

ⓐ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

ⓑ $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

ⓒ $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3}+C$

[✓ ⓓ] $3\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

31

$$\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}\,dx =$$

ⓐ $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$

[✓ ⓑ] $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$

ⓒ $-2\sqrt{2+\cot x}+C$

ⓓ $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}}+C$

32

الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x)=8+\csc x\cot x$ هي:

ⓐ $F(x)=8x+\csc x+C$

ⓑ $F(x)=8x-\cot x+C$

[✓ ⓒ] $F(x)=8x-\csc x+C$

ⓓ $F(x)=8x+\cot x+C$

33 إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

- a $\frac{\ln x}{x}$
- [✓ b] $\frac{2\ln x}{x}$
- c $\frac{x\ln x}{2}$
- d $\frac{2\ln^2 x}{x}$

34 $\int x^2 \ln(x)\,dx =$

- a $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$
- [✓ b] $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$
- c $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$
- d $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

35 إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

- a $-\frac{10}{x}$
- b $\frac{10}{x}$
- c $\frac{1}{x}$
- [✓ d] $-\frac{1}{x}$

36 $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx =$

- [✓ a] $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$
- b $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$
- c $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$
- d $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

37 $\int \frac{e^x}{e^x - 4}\,dx =$

- a $-\frac{1}{2}(e^x - 4) + C$
- [✓ b] $\ln|e^x - 4| + C$
- c $-\ln|e^x - 4| + C$
- d $\frac{1}{2}\ln|e^x - 4| + C$

38 إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

$\int v\,du =$

- a $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
- b $-e^{3x+2} + C$
- [✓ c] $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
- d $e^{3x+2} + C$

39 إذا كان $\int (2x+1)\ln x \, dx = uv - \int v du$ فإن: $uv =$

(a) $(2x+1)\ln x$

(b) $2x\ln x$

(c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$

[✓ (d)] $x(x+1)\ln x$

40 الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$

[✓ (b)] $\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$

(c) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

(d) $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

41 $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4} dx =$

(a) $4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

(b) $3x + 2\ln|x-2| - 2\ln|x-2| + C$

[✓ (c)] $3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

(d) $3x + 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$

42 إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)dx = 2$, $\int_{-1}^3 f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^3 (2f(x)+3g(x)+1)dx$ تساوي:

(a) 18

(b) -6

[✓ (c)] 6

(d) 12

43 لتكن: $f(x) = x^2+5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$

(b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$

(c) $\mathbb{R}^-$

[✓ (d)] $\mathbb{R}^+$

44 $\int_{-1}^{1} (1-|x|)dx =$

[✓ (a)] 1

(b) -1

(c) 0

(d) $\frac{1}{2}$

45 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

(a) 4

[✓ (b)] 2

(c) 0

(d) π

46 مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي: $\int_a^b f(x)dx$

✗

47	إذا كانت: $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \le 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$	✓
48	مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f: $f(x)=4-x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$	✓
49	حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V=\pi\int_0^4 4x\,dx-\pi\int_0^1 4x\,dx$	✓
50	طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,1]$ هو $L=\frac{2}{3}$ وحدة طول.	✗
51	منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $-\sqrt{x}+x$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلة: $f(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x^2+\frac{2}{3}$	✗
52	المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y'''+(y')^2+y=0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى.	✓
53	إذا كان $y=1$ عند $x=0$ و $y'+y=2$ فإن $y=2e^{-x}$	✗
54	إذا كان $y=\frac{1}{2}$ عند $x=0$ و $y'+2y=0$ فإن $y=\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{4}$	✗
55	المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y''+x)^2}{xy}=3$ من: a الرتبة الأولى والدرجة الثانية. b الرتبة الثانية والدرجة الأولى. [✓ c] الرتبة الثانية والدرجة الثانية. d الرتبة الأولى والدرجة الأولى.	
56	حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=2x$ الذي يحقق $y=-2$ عندما $x=1$ هو: a $y=x^2+3$ [✓ b] $y=x^2-3$ c $y=\frac{x^2}{2}-3$ d $y=\frac{x^2}{2}+3$	
57	إذا كان $y''=2x^2+3x$ فإنّ: a $y=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+c$ b $y=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$ [✓ c] $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^3+c_1x+c_2$ d $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^3+c_1x$	

58

حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

- a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$
- b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$
- [✓ c)] $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)} + 1$
- d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)} + 1$

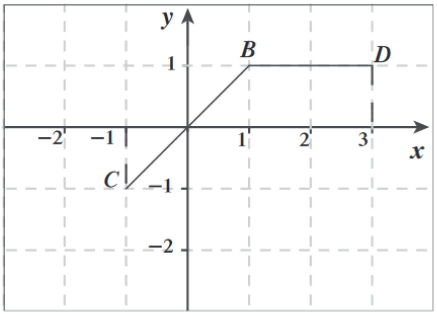
59

مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

- a) 9π units^2
- b) 6π units^2
- c) 3π units^2
- [✓ d)] $\frac{9}{2}\pi$ units^2

60

إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB} \cup \overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = -1$ هي:



- [✓ a)] 3 units^2
- b) 4 units^2
- c) 2 units^2
- d) 5 units^2

61

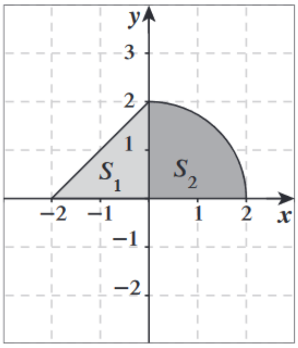
حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

- a) 6π
- b) 18
- [✓ c)] 18π
- d) 81π

62

المنطقة المظللة $S = S_1 \cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.

حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:



- a) $\frac{40}{3}\pi$
- b) $4 + 2\pi$
- c) $\frac{16}{3}\pi$
- [✓ d)] 8π

63

حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = -\sqrt{4 - x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

- a) 4π
- b) 6π
- c) $\frac{16}{3}\pi$
- [✓ d)] $\frac{32}{3}\pi$

64	طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو: a 7 units b 6 units [✓ c] 5 units d 1 unit
65	معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي: a $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ [✓ b] $\ln\|3-x\|+3$ c $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ d $3-\ln\|3-x\|$
66	طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=x-3$ في الفترة $[0,2]$ هو: a $\sqrt{2}$ units [✓ b] $2\sqrt{2}$ units c $3\sqrt{2}$ units d $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units
67	معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي: a $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ b $x^2-2\sqrt{x^3}$ [✓ c] $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ d $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

القطوع المخروطية

68	$y^2=\frac{1}{2}x$ هي معادلة قطع مكافئ، بؤرته $\left(0,\frac{-3}{2}\right)$	✗
69	معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ودليله $x=-2$ هي: $x^2=8y$	✗
70	في القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$، طول المحور الأصغر يساوي 8	✓
71	طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ يساوي 10 units	✓
72	النقطة $(\sqrt{33},0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$	✓
73	الخطّان المقاربان للقطع الزائد الذي معادلته $x^2-y^2=12$ هما متعامدان.	✓
74	$x^2-y^2=4$ هي معادلة قطع زائد.	✓
75	نقطتا طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{25}-y^2=1$ هما: $B_1(1,0)$, $B_2(-1,0)$.	✗
76	معادلتا المقاربين للقطع الزائد $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ هما: $y=\frac{-1}{2}x$ ، $y=\frac{1}{2}x$	✓
77	إذا كانت $e<1$، فإن القطع هو قطع ناقص.	✓
78	المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{y^2}{15}-\frac{x^2}{10}=1$ ينطبق على محور الصادات.	✓

79

المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2), B(-5,2)$ هي:

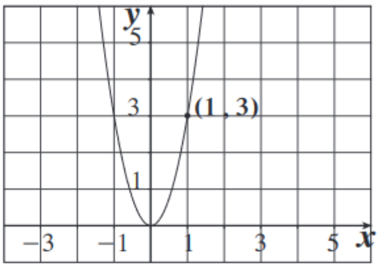
[✓ a] $y^2=-\frac{4}{5}x$

b $x^2=-\frac{4}{5}y$

c $y^2=\frac{4}{5}x$

d $x^2=\frac{4}{5}y$

80



بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:

a $\left(0,\frac{-4}{3}\right)$

b $\left(\frac{9}{20},0\right)$

[✓ c] $\left(0,\frac{1}{12}\right)$

d $\left(\frac{1}{12},0\right)$

81

النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2=4py$ هي:

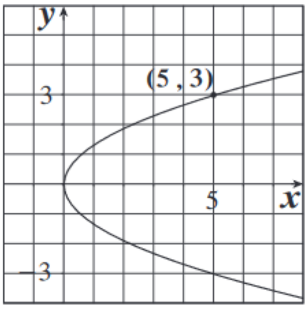
a $(1,1)$

b $(1,0)$

c $(0,1)$

[✓ d] $(0,0)$

82



معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:

a $x^2=-\frac{25}{3}y$

[✓ b] $y^2=\frac{9}{5}x$

c $x^2=\frac{25}{3}y$

d $y^2=\frac{5}{9}x$

83

النقطة $A(-10,0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{y^2}{64}+\frac{x^2}{100}=1$. مجموع المسافتين AF_1+AF_2 حيث F_1 ، F_2 هما البؤرتان يساوي:

a 10 units

b 12 units

c 14 units

[✓ d] 20 units

84

طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ يساوي:

a 12 units

b $2\sqrt{41}$ units

c 16 units

[✓ d] 20 units

85

معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7,0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0,\pm 6)$ هي:

[✓ a] $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{36}=1$

b $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{85}=1$

c $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$

d $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49}=1$

86	لأيّ قطع ناقص يكون: [✓ a] $a > c$ b $a < c$ c $a = ec$ d $a = c$
87	الاختلاف المركزي للمعادلة $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هو: [✓ a] $\frac{\sqrt{11}}{6}$ b $\frac{\sqrt{11}}{5}$ c $\frac{36}{25}$ d $\frac{25}{36}$
88	إذا كانت معادلة أحد المقاربين $y = \frac{-7}{5}x$ والاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{74}}{5}$ فمعادلة القطع الزائد هي: a $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{5} = 1$ b $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 1$ c $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ [✓ d] $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$