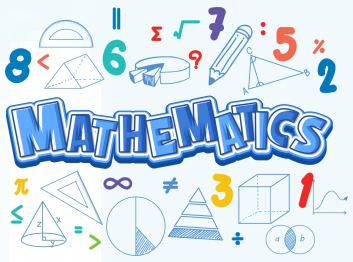
سما
SAMA

تَدرّب مَعَ سَمَا

الفصل الثاني

الرّياضِـــيَّات



الوحدة الثامنة

المرحلة الثانوية

WWW.SAMAKW.NET/AR

i teacher
المعلم الذكي

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

٨ حســـاب المثلثات (٢)

	الوحدة الثامنة : حساب المثلثات (٢)
(٨ – ١)	دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)
(٨ – ٢)	العلاقات بين الدوال الدائرية ١
(٨ – ٣)	العلاقات بين الدوال الدائرية ٢

(٨-١) دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة

النقطة المثلثية : هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة

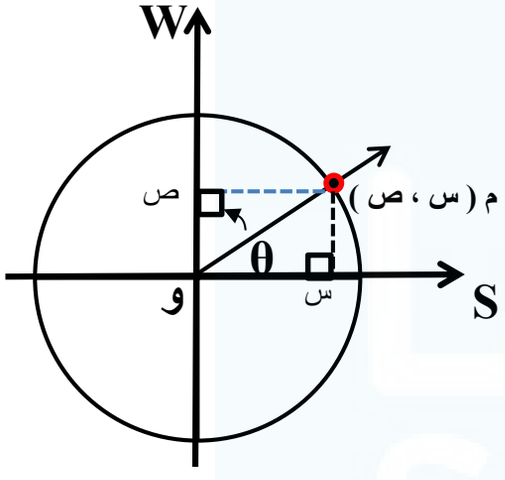
ملاحظة : تكون النقطة (س , ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة

النقطة المثلثية : هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة

ملاحظة : تكون النقطة (س , ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

تعريف : إذا كانت (س ، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث $٠ \ t \ ٢ < \theta < N$ فإن :



(١) دالة الجيب : $د(\theta) = جا\theta = ص$

(٢) دالة جيب التمام : $د(\theta) = جتا\theta = س$

(٣) دالة الظل : $د(\theta) = ظا\theta = \frac{ص}{س}$ ، $س \neq ٠$

(٤) دالة القاطع : $د(\theta) = قا\theta = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$

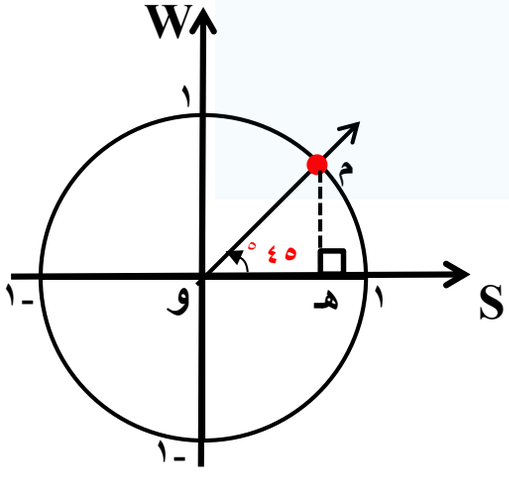
(٥) دالة قاطع التمام : $د(\theta) = قتا\theta = \frac{١}{ص}$ ، $ص \neq ٠$

(٦) دالة الظل التمام : $د(\theta) = ظتا\theta = \frac{س}{ص}$ ، $س \neq ٠$

حاول أن تحل صـ ٨٩ (١) : على دائرة الوحدة ارسم زاوية في الوضع القياسي قياسها ٤٥°

ثم أوجد جا ٤٥° , جتا ٤٥°

الحل :



ملاحظة ١ : للتحويل من القياس الدائري إلى القياس الستيني نستخدم القانون : $س° = هـ^{د} \times \frac{١٨٠}{\pi}$

ملاحظة ٢: للتحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري نستخدم القانون : هـ^{د} = س$^{\circ}$ × $\frac{\pi}{١٨٠}$

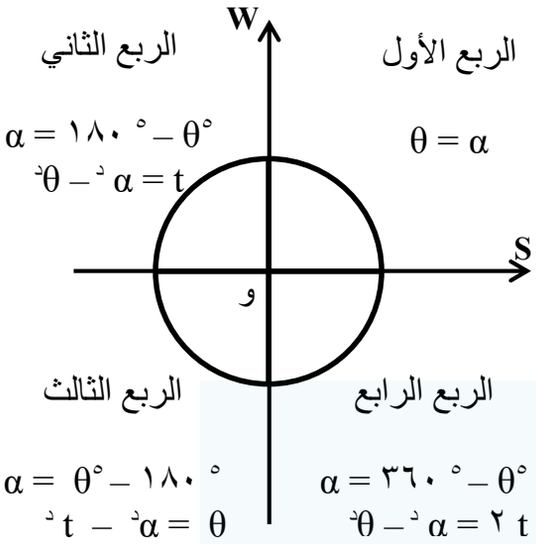
تعريف زاوية الإسناد :

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (و ب ممس ، و ج ممس) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن

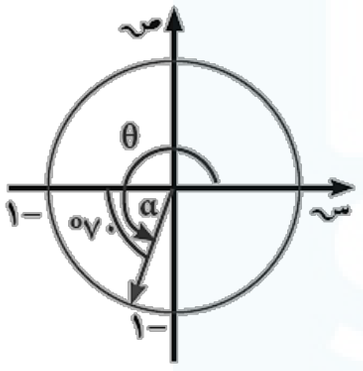
$٠^{\circ} < \alpha < ٩٠^{\circ}$

أو $٠^{د} < \alpha < \frac{\pi}{٢}$



حاول أن تحل صـ ٩٤ (٤) : في الشكل المقابل , زاوية الاسناد α° للزاوية θ° . أوجد θ .

الحل :



القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$
١٣٥°	$\frac{\pi ٣}{٤}$
١٨٠°-	$\pi -$
١٥٠°-	$\frac{\pi ٥-}{٦}$
٢٢٥°-	$\frac{\pi ٥-}{٤}$
١٥٠°	$\frac{\pi ٥}{٦}$

(٨ - ٢) العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

حاول أن تحل صـ ٩٦ (١) : أكمل إذا كان :

ا~ جا م = ٠,٣ فإن جا (- م) = - ٠,٣

ب~ جتا ل = ٠,٣ ٨ فإن جتا (- ل) = ٠,٣ ٨

ج~ ظا س = ٣,١ ٤ فإن ظا (- س) = - ٣,١ ٤

د~ جتا (- ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = $\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل صـ ١٠٢ (٥) : بسط كلاً من التعبيرات لأبسط صورة

ا~ جا (θ + ٩π) = جا (θ + ٨π + π) = جا (π + θ) = - جا θ

ب~ جتا ($-\frac{٣\pi}{٢}$ - θ) = جتا - ($\frac{٣\pi}{٢}$ + θ) = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + θ) = - جا θ

(ب) ١ أثبت أن

جا (٩٠° + س) + جتا (١٨٠° - س) + جا (٢٧٠°) + جتا (١٨٠°) = - ٢

حل معادلات مثلثية :

حل المعادلة جتا س = جتا θ هو س = ٢ θ ك + t ك أو س = - ٢ θ + t ك (ك ∈ W)

حل المعادلة جا س = جا θ هو س = ٢ θ ك + t ك أو س = ٢ θ - t ك (ك ∈ W)

حل المعادلة ظا س = ظا θ هو س = θ + t ك (ك ∈ W)

حاول أن تحل صـ ١٠٤ (٧) : حل المعادلة : ٢ جا س − ١ = ٠

الحل :

حل المعادلة : ٢ جتاس = $\sqrt{٣}$

حل المعادلة : $\sqrt{٣}$ ظا س = ١

(٨ - ٣) العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية :

(١) $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ (٢) $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$ (٣) $\text{ظتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$

(٤) $\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ (٥) $\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$

متطابقة فيثاغورث :

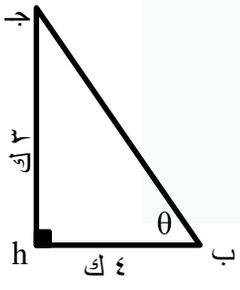
$\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$ منها $١ + \text{ظا}^{٢}\theta = \text{قا}^{٢}\theta$ ، $١ + \text{ظتا}^{٢}\theta = \text{قتا}^{٢}\theta$

حاول أن تحل صـ ١٠٨ (١) : إذا كان $\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتا θ ، ظا θ

حاول أن تحل صـ ١٠٩ (٢) : بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان $\text{ظا}\,\theta = \frac{٣}{٤}$ ، جا θ سالبة

فأوجد جا θ , جتا θ .

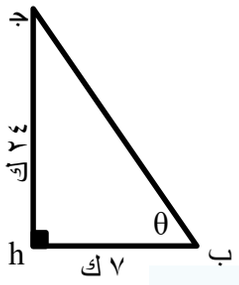
الحل :



حاول أن تحل صـ ١١٠ (٣) : بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان ظا $\theta = \frac{٢٤}{٧}$ ، جتا $\theta > ٠$

فأوجد جا θ , جتا θ .

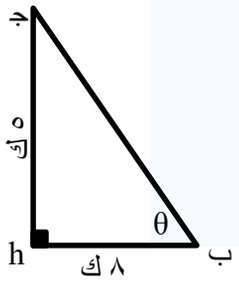
الحل :



حاول أن تحل صـ ١١١ (٤) : بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان ظتا $\theta = \frac{٥}{٨}$ ، جتا $\theta > ٠$

فأوجد جا θ

الحل :



حاول أن تحل صـ ١١٢ (٥) : أثبت أن : جتا^{٤} θ + جا^{٢} θ × جتا^{٢} θ = جتا^{٢} θ

الحل :

جتا^{٤} θ + جا^{٢} θ × جتا^{٢} θ = جتا^{٢} θ (جتا^{٢} θ + جا^{٢} θ) (التحليل بأخذ ع٠م٠أ)

= جتا^{٢} θ × ١ (لأن جتا^{٢} θ + جا^{٢} θ = ١)

= جتا^{٢} θ

حاول أن تحل صـ ١١٢ (٦) : أثبت أن : $(\text{قا}^{٢} \theta + \text{قتا}^{٢} \theta) - (\text{ظا}^{٢} \theta + \text{ظتا}^{٢} \theta) = ٢$

الحل :

$(\text{قا}^{٢} \theta + \text{قتا}^{٢} \theta) - (\text{ظا}^{٢} \theta + \text{ظتا}^{٢} \theta) = ١ + \text{ظا}^{٢} \theta + ١ + \text{ظتا}^{٢} \theta - \text{ظا}^{٢} \theta - \text{ظتا}^{٢} \theta$

$(\text{ظا}^{٢} \theta + ١ = \text{قا}^{٢} \theta \ ، \ \text{ظتا}^{٢} \theta + ١ = \text{قتا}^{٢} \theta)$

$= ١ + ١$

$= ٢$

اثبت صحة المتطابقة : $\dfrac{(\text{قا} \theta + ١) (\text{قا} \theta - ١)}{\text{جا}^{٢} \theta} = \text{قا}^{٢} \theta$

أثبت صحة $\dfrac{\text{جا} \theta}{\text{جا} \theta - \text{جتا} \theta} = \dfrac{١}{١ - \text{ظتا} \theta}$.

٥١	قا(٣١٥°) = $\sqrt{٢}$	
٥٢	إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا($\theta + \pi$) = ٣	
٥٣	مجموعة حل قا س = ٣, ٠ هي $\varnothing$	
٥٤	$\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{١ - \text{جتا}\theta} - \text{جتا}\theta = -١$	

٥٥	حل المعادلة ظا θ = $\sqrt{٣}$ حيث ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ هو (أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi ٢}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{\pi ٤}{٣}$
٥٦	إن قيمة المقدار : جتا (٢ π - θ) × جا ($\frac{\pi}{٢}$ + θ) - جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + θ) جا θ هي : (أ) - ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١
٥٧	الزاوية التي في الوضع القياسي و قياس زاوية إسنادها يساوي ٣٠° هي : (أ) ١٢٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٣٠° (د) ٣٠٠°
٥٨	الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي: (أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠° (جـ) ٣٥٠° (د) ١١٠°

٥٩ الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{\pi ١١}{٦}$ (ب) ٢٥٥°

(جـ) $\frac{\pi ٧}{٨}$ (د) $\frac{\pi ٥}{٣}$

٦٠ $[\text{جا}(-١٣٥^\circ)]^٢ + [\text{جتا}(-١٣٥^\circ)]^٢ =$

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

٦١ إن قيمة المقدار $\text{قا}(\pi ٢ - \theta) - \text{قتا}\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right) + \text{جتا}\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right) + \text{جا}\theta$ هي:

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٦٢ إذا كانت $\text{جتا}\theta = -\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن $\text{جا}\theta =$

(أ) $\frac{-٧}{\sqrt{٦٧٢}}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦٧٢}}{٧}$

(جـ) $\frac{-\sqrt{٦٧٢}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{\sqrt{٦٧٢}}$

٦٣ **جاس × قاس يساوي:**

أ ظتاس ب ظاس ج قتاس د قاس

٦٤ النسبة المثلثية في مايلي التي قيمتها ($\frac{١}{٢}$) هي :

أ جا(-٣٣٠°) ب جتا (-٢٤٠°) ج ظتا (-١٥٠٠°) د ظا (٧٦٥°)

٦٥ الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) -٣٢٠° (ب) -٢٧٠° (جـ) $\frac{\pi ٥}{٣}$ (د) $\frac{\pi ١٣}{٩}$

٦٦ إذا كانت $\text{قا}\theta = \frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع. فإن $\text{ظا}\theta =$

(أ) $\frac{\sqrt{٥٧}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥٧}}$ (جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥٧}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥٧}}{٢}$