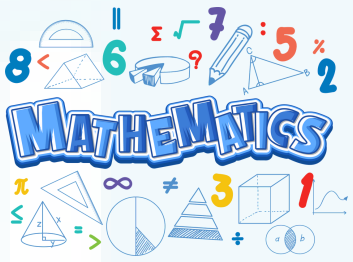
سما
SAMA

تَدرّب مَعَ سَمَا

الفصل الثاني

الرّياضِـــيَّات



الوحدة السادسة

المرحلة الثانوية

WWW.SAMAKW.NET/AR

i teacher
المعلم الذكي

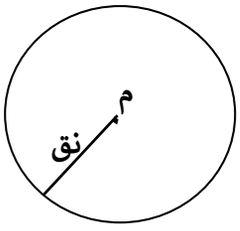
www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

٦ هندسة الدائرة

	الوحدة السادسة : هندسة الدائرة
(٦ – ١)	الدائرة ـ مماس الدائرة
(٦ – ٢)	الأوتار و الأقواس
(٦ – ٣)	الزوايا المركزية و الزوايا المحيطية
(٦ – ٤)	الدائرة ـ الأوتار المتقاطعة و المماس

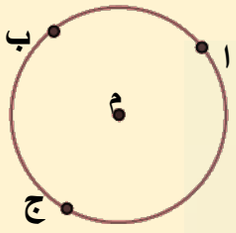
(٦-١) الدائرة

تعريف الدائرة :



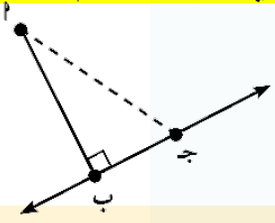
الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعداً ثابتاً تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز له عادة بالرمز R

نظريه (١) :



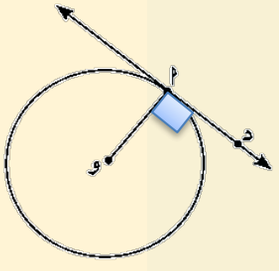
كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة

نتيجة ١ : من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم



نتيجة ٢ : أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي

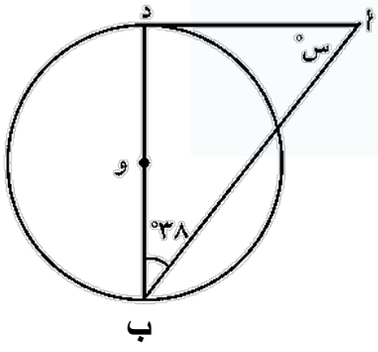
نظريه (٢) :



المماس عمودي على نصف قطر التماس

$\overline{\text{و ا}}$ نصف قطر ، $\overleftrightarrow{\text{ا د}}$ مماس ، $\overline{\text{و ا}} \perp \overleftrightarrow{\text{ا د}}$

حاول أن تحل صـ ١٥ (٢) : في الشكل المقابل :

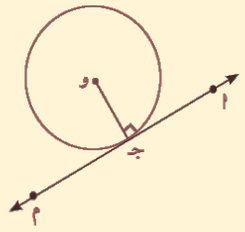


$\overleftrightarrow{\text{ا د}}$ مماس للدائرة التي مركزها و . أوجد قيمة س°

الحل :

نظريه (٣) :

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسا لهذه الدائرة عند هذه النقطة .



أي :

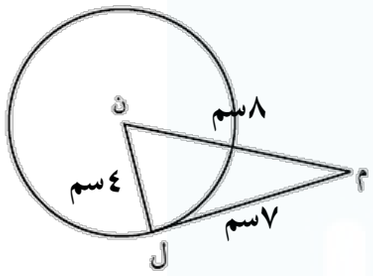
إذا كان $\overline{\text{و جـ}}$ نصف قطر ، $\overline{\text{ج و}} \perp \overline{\text{ا م}}$

يكون $\overleftrightarrow{\text{ا م}}$ مماساً للدائرة

حاول أن تحل صـ ١٨ (٤) : في الشكل المقابل : إذا كان ن ل = ٤ سم ، ل م = ٧ سم ، ن م = ٨ سم

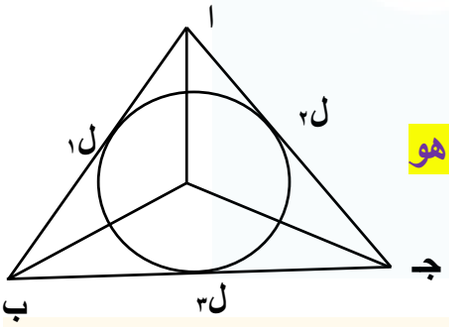
فهل م ل مماس للدائرة ؟ فسر إجابتك .

الحل



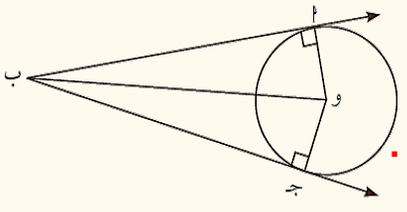
الدائرة المحاطة بمثلث :

هي دائرة مماسة لأضلاعه الثلاثة من الداخل مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث .



نظريه (٤) :

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان .



نتائج النظرية :

١) المثلث ب ا جـ متطابق الضلعين .

٢) $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية ا ب جـ

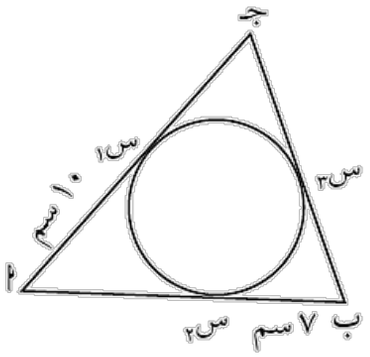
٣) $\overleftarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية ا و جـ

٤) و ب ⊥ ا جـ وينصفه

حاول أن تحل صـ ٢١ (٦) : من الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث ا ب جـ = ٥٠ سم ,

فأوجد طول ب جـ

الحل :



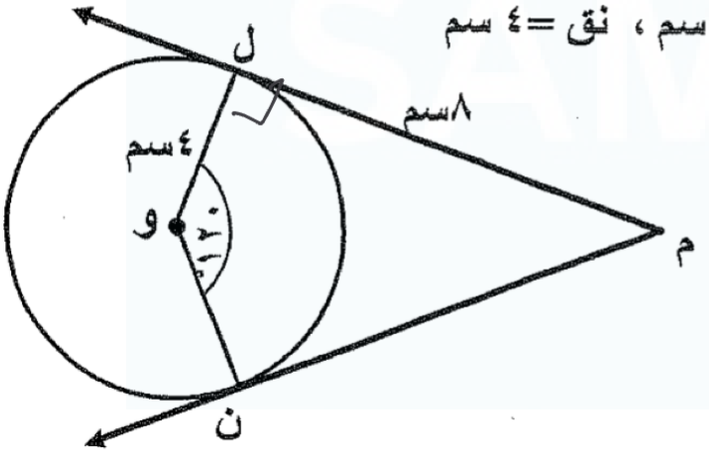
(أ) في الشكل المقابل م ل، م ن مماسان للدائرة التي مركزها و

ق (ل و̂ ن) = ١٢٠°، م ل = ٨ سم ، نق = ٤ سم

أوجد مع ذكر السبب:

١- ق(ل م̂ ن) .

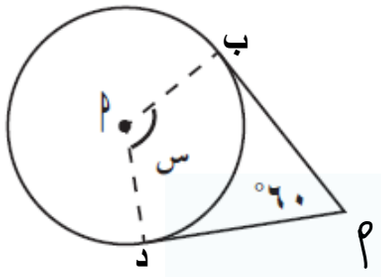
٢- محيط الشكل ل م ن و.



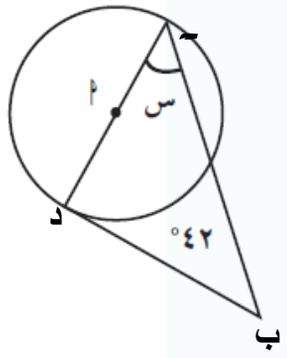
حل كتاب التمارين بند (٦ – ١) مماس الدائرة
المجموعة ١ تمارين أساسية صفحة ٩ ، ١٠

في التمارين (١ – ٢) ، القطع المستقيمة تمس الدوائر ، ا مركز كل دائرة .أوجد قيمة س

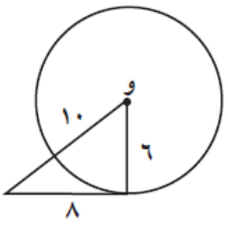
الحل :



الحل :



في التمارين (٣ – ٤) , حدّد ما إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التي مركزها و .



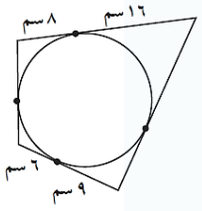
□: **الحل**

.

.

في التمارين (٥ – ٦) ، حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محاطة بمضلع(خارجة)

□ : يحيط المضلّع بدائرة .أوجد محيط المضلع

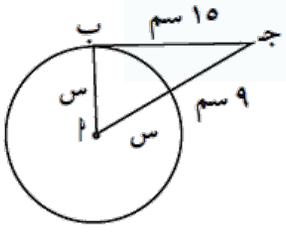


الحل : محيط المضلع = ١٦ + ١٦ + ٩ + ٩ + ٦ + ٦ + ٨ + ٨

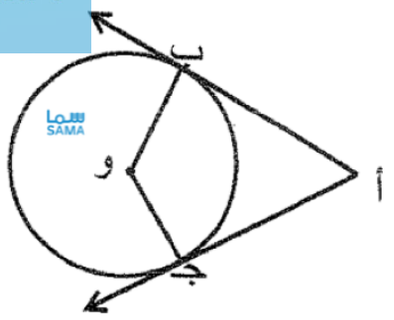
= ٧٨ سم

في التمارين (٨ – ٩) ، $\overleftrightarrow{ب ج}$ مماس للدائرة . أوجد قيمة س

□ : **الحل :**



(أ) في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ



أ ب = ٤ سم ، وب = ٣ سم ، ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٧٤ °

أوجد :

(١) ق (أ $\hat{ب}$ و)

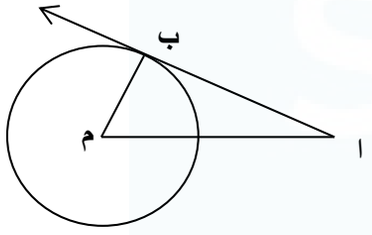
(٢) ق (ب $\hat{و}$ جـ)

(٣) محيط الشكل أ ب و جـ

تمارين بند (٦ – ١) مماس الدائرة

□ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ٣ سم ، $\overleftrightarrow{ا ب}$ يمس الدائرة في ب .

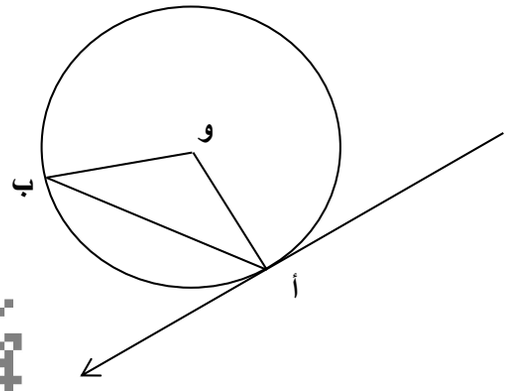
إذا كان ا م = ٥ سم أوجد طول ا ب؛



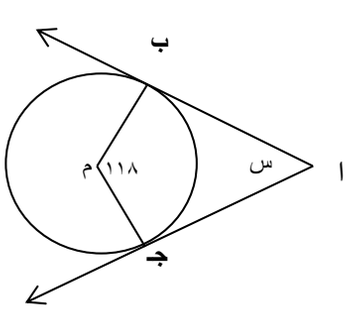
□ في الشكل المقابل : ا ب؛ وتر في دائرها مركزها و ، ق (ا و$\hat{ب}$) = ٦٠ ° ،

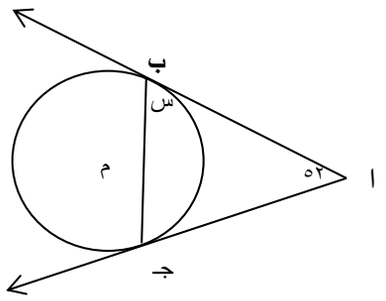
رسم $\overleftrightarrow{ا جـ}$ يصنع مع ا ب زاوية قياسها ٣٠ ° .

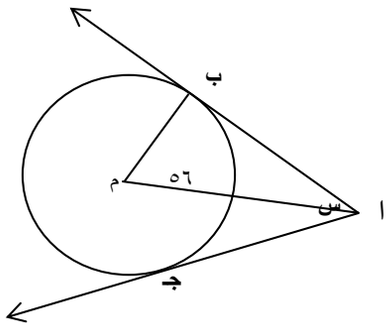
أثبت أن $\overleftrightarrow{ا جـ}$ مماس للدائرة .



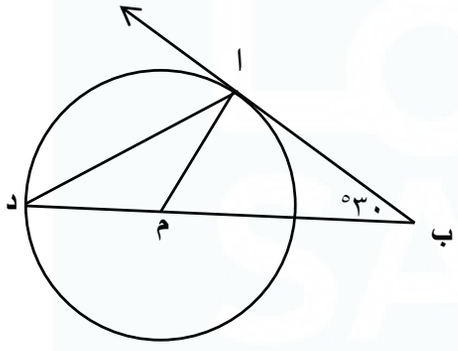
□ في كل الأشكال التالية إذا كانت ا ب ، ا جـ قطعتين مماستين للدائرة حيث م مركز الدائرة فعين س







□ في الشكل المقابل ب ا يمس الدائرة التي مركزها م في ا ، ق (ا ب د) = ٣٠ ° فإن ق(ا د ب) =



أ) ٣٠ °　　ب) ٤٥°

جـ) ٦٠ °　　د) ليس أيا مما سبق .

(٦-٢) الأوتار والأقواس

الوتر: هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة

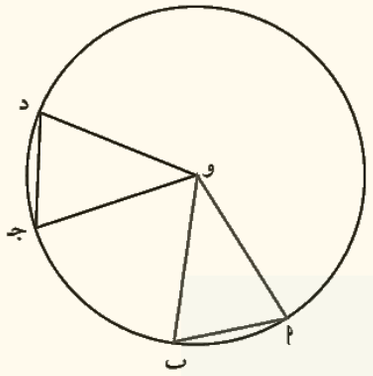
نظريه (١) :

في دائرة أو في دوائر متطابقة

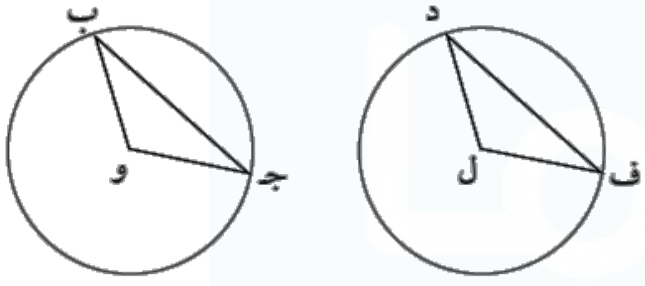
١) للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة

٢) الأوتار المتطابقة تقابل أقواسا متطابقة

٣) للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة



حاول أن تحل صـ ٢٦ (١) : في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان إذا كان $\overline{ب ج}$ = $\overline{د ف}$، ماذا تستنتج؟



الحل :

∵ $\overline{ب ج}$ = $\overline{د ف}$

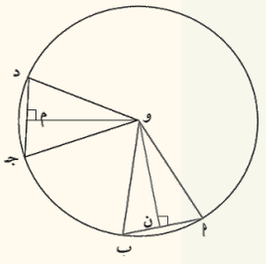
∴ $\overset{\frown}{ب ج}$ = $\overset{\frown}{ف د}$

ق ($\hat{}$ ف ل د) = ق ($\hat{}$ ب و جـ)

نظريه (٢) :

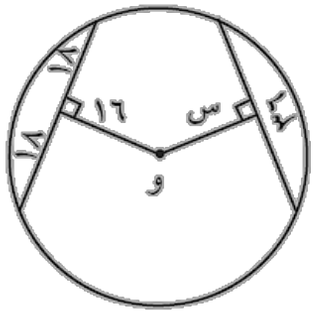
١) الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة .

٢) الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة تكون متطابقة.

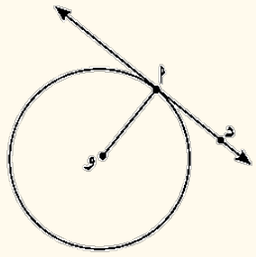


حاول أن تحل صـ ٢٨ (٢) : دائرة مركزها و ، أوجد قيمة س في الشكل المقابل وفسر إجابتك.

الحل :



نظريه (٣) :

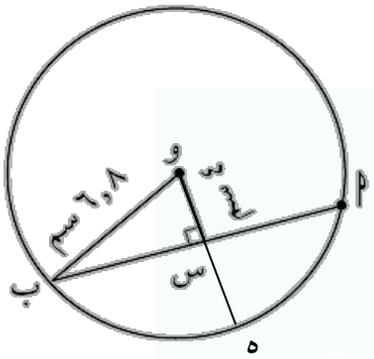


١) القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه .

٢) القطر الذي ينصف وتراً (ليس قطراً) في دائرة يكون عموديا على الوتر .

٣) العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة .

حاول أن تحل صـ ٣٠ (٣) : استخدم الشكل المقابل لإيجاد .



ا~ طول الوتر $\overline{أ ب}$

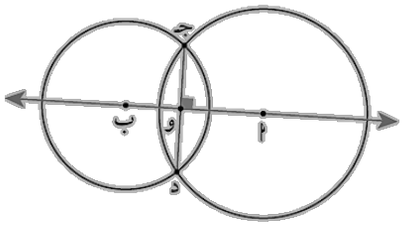
ب~ المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{أ ب}$

الحل :

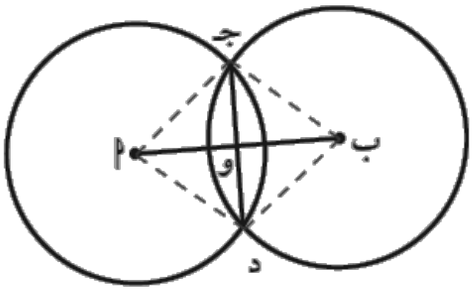
نتيجة : خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك بينهما وينصفه .

أي : إذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين ،

$\overline{ج د}$ الوتر المشترك ، فإنّ : $\overline{أ ب} \perp \overline{ج د}$ ، و منتصف $\overline{ج د}$



حاول أن تحل صـ ٣١ (٥) : يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين ا ، ب مركزيهما ، $\overline{جـ د}$ وتر مشترك إذا كان $\overline{جـ د}$ = ١٤ سم ، ق(ق) = ١٣ سم فأوجد طول $\overline{ا ب}$.



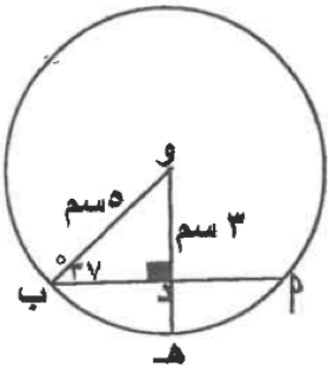
(أ) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها و ، $\overline{\text{و هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،

$\text{ق}(\angle \text{أ ب و}) = ٣٧°$

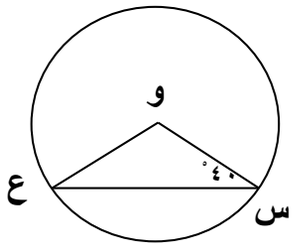
أوجد : (١) طول $\overline{\text{أ ب}}$

(٢) $\text{ق}(\angle \text{ب هـ})$



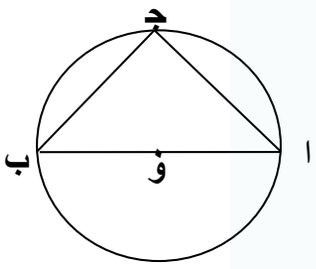
تمارين بند (٦ – ٢) الأوتار والأقواس

□ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، ق (و س^ع) = ٤٠ ° فإن ق ($\overset{\frown}{س ع}$) =



□ ٤٠ °　□ ٨٠ °　□ ١٠٠ °　□ ٥٠ °

□ في الشكل المقابل ا ب قطر في دائرة مركزها و ، ق (ا $\overset{\frown}{جـ}$) = ٢ ق ($\overset{\frown}{جـ ب}$) فإن ق (ا ب $\hat{جـ}$) =



□ ٩٠ °　□ ٦٠ °　□ ٣٠ °　□ ٤٥ °

□ دائرة مركزها م نصف قطرها ٢٠ سم , اوجد طول الوتر الذي بعده عن مركزها ١٦ سم .

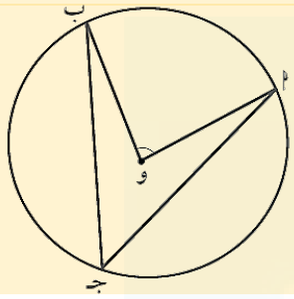
(٦-٣) الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

الزاوية المركزية : **هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة**

الزاوية المحيطية : **هي الزاوية التي رأسها أحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة**

نظريه (١) : قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة .

أي : ق (ا م ^ ب) = ق (ا ب ل)



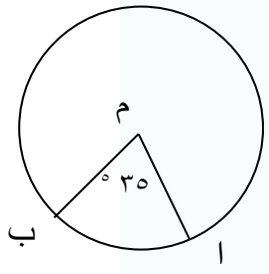
نظريه (٢) : في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها .

أي : ق (ا ج ^ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (ا ب ل)

نتيجة : **قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس .**

أي : ق (ا ج ^ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (ا م ^ ب)

حاول أن تحل صـ ٣٣ (١) : إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥° ، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها .



الحل :

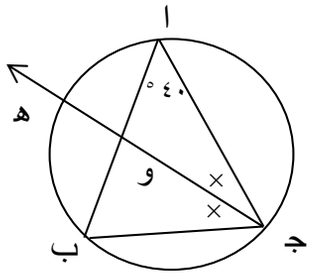
ق (ا م ^ ب) المركزية = ٣٥ °

ق (ا ب ل) = ق (∠ م ب) = ٣٥ °

°

حاول أن تحل صـ ٣٥ (٣) : ا ب ج مثلث متطابق الضلعين حيث ا ، ب ، ج نقاط على الدائرة التي مركزها و ، ق (ب^ ا ج) = ٤٠ ° ، جـ هـ مماس منصف الزاوية الداخلية ا ج ب يقطع الدائرة في النقطة ه ما قياس القوس أ ه ؟

الحل :



نتائج : في الدائرة

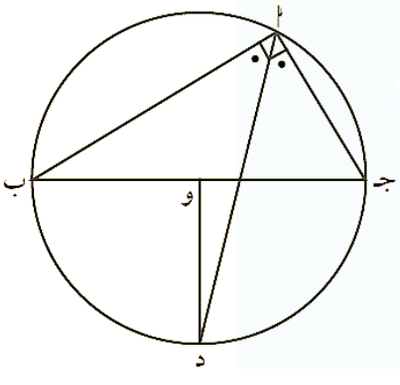
١) كل زاويتين محيطتين تحصران القوس نفسه متطابقتان .

٢) كل زاوية محيطية تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة .

٣) كل شكل رباعي دائري (محاط بالدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملة .

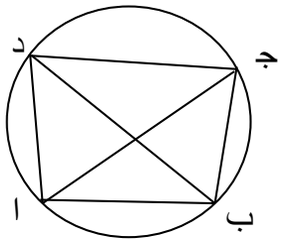
حاول أن تحل صـ ٣٥ (٤) : في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، إذا كان ق (ا ب^ ج) = ٣٠ ° ، أوجد ق (ا د^ ب)

الحل :



حاول أن تحل صـ ٣٦ (٦) : ا ب ج د شكل رباعي دائري

أثبت أن ق (ا د̂ ب) = ق (ا ج̂ ب)

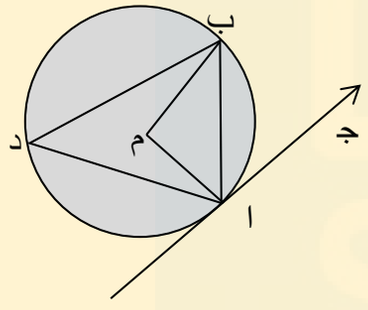


الحل :

نظرية ٣ :

١) قياس الزاوية الماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

٢) قياس الزاوية الماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر .



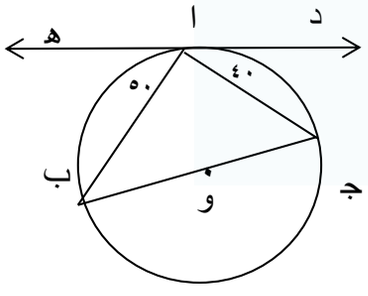
أي : ق (ج ا̂ ب) المماسية = ق (ا د ب̂) المحيطية

ق (ج ا ب) المماسية = $\frac{١}{٢}$ ق (ا ب ل)

ق (ج ا ب) المماسية = $\frac{١}{٢}$ ق (م ب) المركزية

حاول أن تحل صـ ٣٩ (٧) : في الشكل المقابل

ق (د ا̂ ج) = ٤٠° ، ق (ه ا ب̂) = ٥٠°



١) أوجد قياسات زوايا المثلث ا ب ج

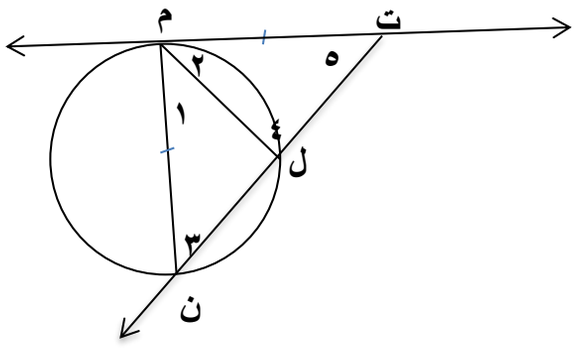
٢) أثبت أن $\overline{ج ب}$ قطر للدائرة .

الحل :

حاول أن تحل صـ ٤٠ (٨) : م ت مماس لدائرة مركزها و , م ن وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت

(م نقطة التماس) ت ن تقطع الدائرة في ل أثبت أنّ ∆ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

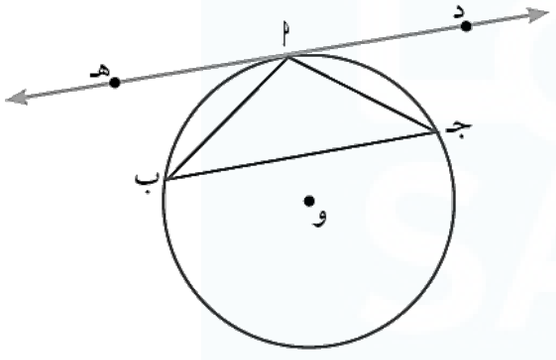
الحل :



حاول أن تحل صـ ٤١ (٩) : في الشكل المقابل ، إذا كان لدينا د ه تي مماس للدائرة عند النقطة ا ،

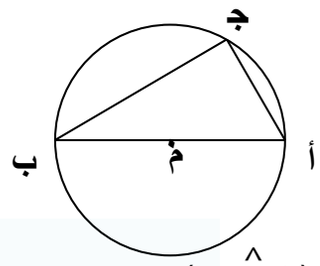
المثلث ا ب ج متطابق الضلعين (ا ب = ا ج) أثبت أنّ : $\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$.

الحل :

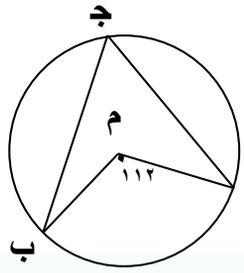


تمارين بند (٦ – ٣) الزوايا المركزية والزواية المحيطية

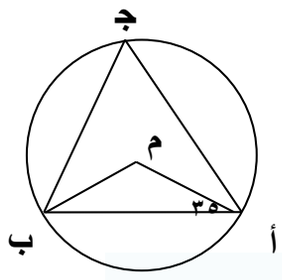
أوجد ق (أ جـ$\hat{}$ ب) علما بأن م مركز الدائرة



ق (ا جـ$\hat{}$ ب) = ...

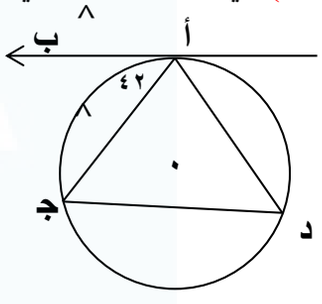


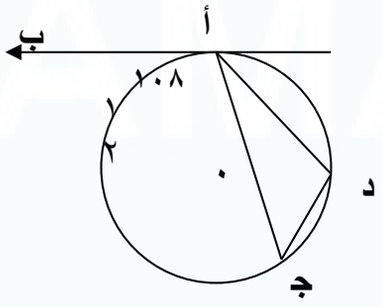
ق (ا جـ$\hat{}$ ب) = ...

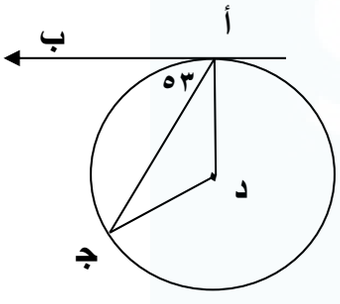


ق (ا جـ$\hat{}$ ب) = ...

٤) في كل شكل مما يلي إذا كان ا ب$\overleftarrow{}$ يمس الدائرة في ا , فأوجد مع ذكر السبب ق (د$\hat{}$)







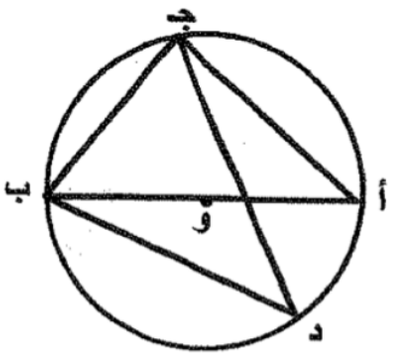
في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، إذا كان ق (جـ ب̂ أ) = ٥٠°

أوجد كلاً مما يلي مع ذكر السبب :

(١) ق (أ ج̂ ب)

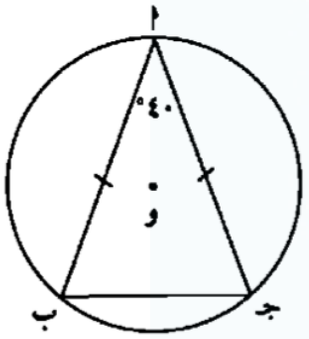
(٢) ق (جـ أ̂ ب)

(٣) ق (جـ د̂ ب)



أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ ، ب ، جـ نقاط على الدائرة مركزها و .

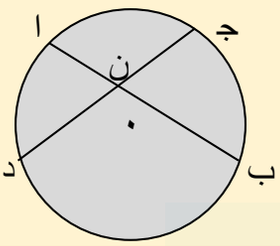
ق(ب أ جـ) = ٤٠° ، فأوجد قياس كل من (أ ب) ، (ب جـ) ، (أ جـ) .



(٦-٤) الدائرة الأوتار المتقاطعة ، المماس

تقاطع الأوتار داخل دائرة :

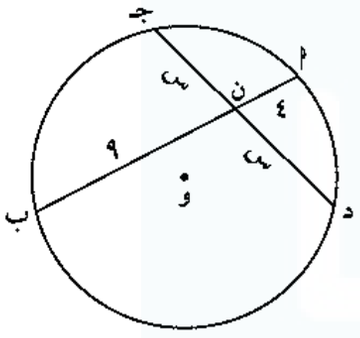
نظريه (١) : إذا تقاطع وتران داخل دائرة ، فإن ناتج ضرب طولي جزئي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزئي الوتر الآخر .



أي : ن ا × ن ب = ن جـ × ن د

حاول أن تحل صـ ٤٣ (١) : في الشكل المقابل , أوجد قيمة س .

الحل :



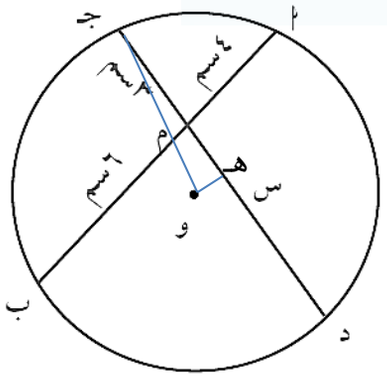
حاول أن تحل صـ ٤٤ (٢) : في الدائرة المقابلة التي مركزها و

م ا = ٤ سم , م ب = ٦ سم , م ج = ٣ سم , م د = س .

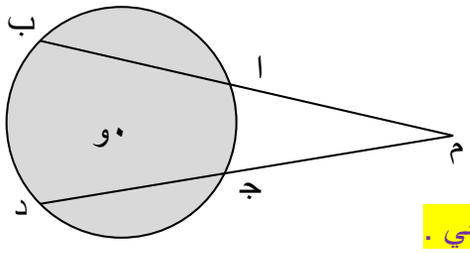
ا~ أوجد قيمة س

ب~ أوجد البعد بين المركز و والوتر $\overline{د ج}$ إذا علمت أنّ طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم .

الحل :



تقاطع الأوتار خارج دائرة :



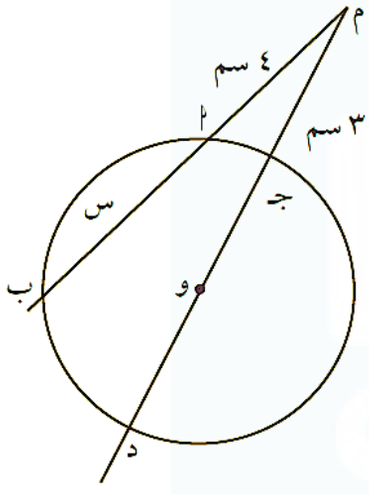
نتيجة (١) : إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة ، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي .

أي : م ا × م ب = م جـ × م د

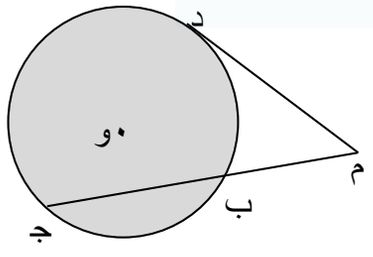
حاول أن تحل صـ ٤٥ (٣): في الشكل المقابل دائرة مركزها و وطول نصف قطرها يساوي ٤ سم

أوجد قيمة س :

الحل :



تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة:



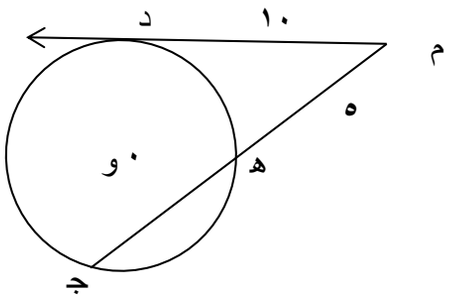
نتيجة (٢) : إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس ، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية .

أي : (م د)^{٢} = م ب × م جـ

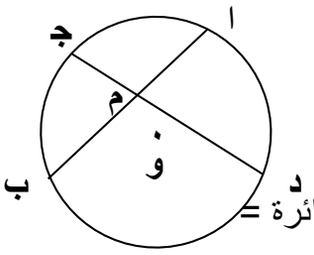
حاول أن تحل صـ ٤٦ (٤) : في الشكل المقابل , م $\overline{\text{د}}$ قطعة مماسية ،

حيث م د = ١٠ ، م هـ = ٥ , أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.

الحل :



في الشكل المقابل : دائرة مركزها و

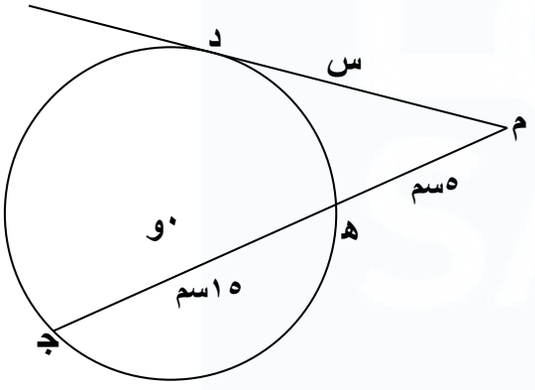


م ا = ٤ سم ، م ب = ٦ سم ، م جـ = ٣ سم ، م د = س

أ) أوجد قيمة س .

ب) أوجد البعد بين المركز والوتر جـ د إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة =

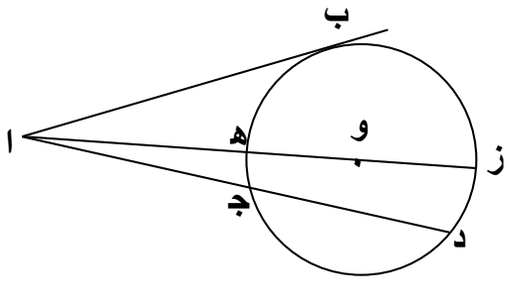
في الشكل المقابل : أوجد قيمة س .



□ في الشكل المقابل : ا ب قطعة مماسة ،

ا جـ = ٤ سم ، ا د = ٩ سم ، ا هـ = ٢ سم أوجد:

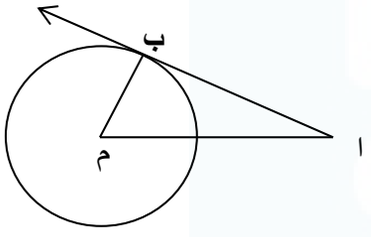
□طول القطعة المماسة ا ب □طول نصف قطر الدائرة .



أجوبة تمارين بند (٦ – ١) مماس الدائرة

□ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ٣ سم ، ا ب يمس الدائرة في ب .

إذا كان ا م = ٥ سم أوجد طول ا ب



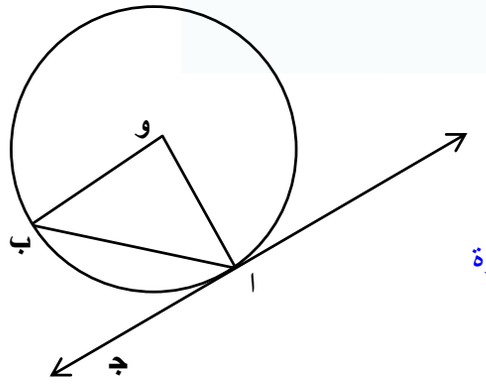
الحل : ا ب مماس ، م ب نصف قطر

ق (ا ب م̂) = ٩٠° (ا ب)^{٢} = (ا م)^{٢} - (م ب)^{٢}

ا ب = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٤ سم

□ في الشكل المقابل : ا ب وتر في دائرة مركزها و ، ق (ا و ب) = ٦٠° ،

رسم ا جـ يصنع مع ا ب زاوية قياسها ٣٠ ° أثبت أن ا جـ مماس للدائرة .



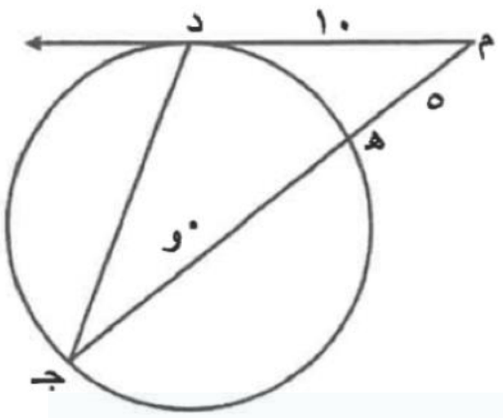
الحل: و ا = و ب = نق ، ق (ا و ب̂) = ٦٠°

ق (و ا ب̂) = ق (و ب ا̂) = ٦٠°

ولكن ق (جـ ا ب̂) = ٣٠°

إذن ق (و ا جـ̂) = ٩٠° إذن ا جـ مماس للدائرة

في الشكل المقابل : $\overline{م د}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠ ، م هـ = ٥ (٦ درجات)

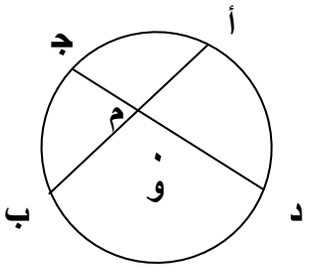


أوجد بذكر السبب :

طول كلا من : $\overline{م جـ}$ ، $\overline{هـ جـ}$

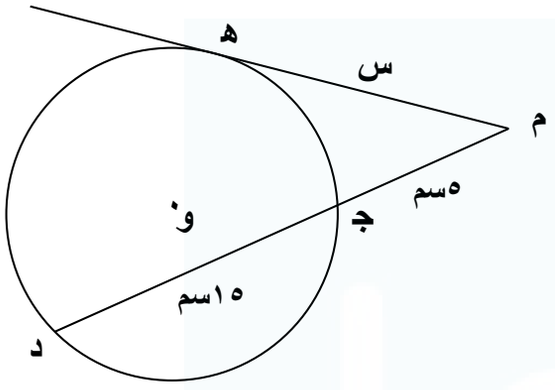
أجوبة تمارين بند (٦ – ٤)
الدائرة الأوتار المتقاطعة ، المماس

- في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، م ا = ٤ سم ، م ب = ٦ سم ، م جـ = ٣ سم ، م د = س



- أوجد قيمة س
- أوجد البعد بين المركز والوتر جـ د إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة = ٨ سم

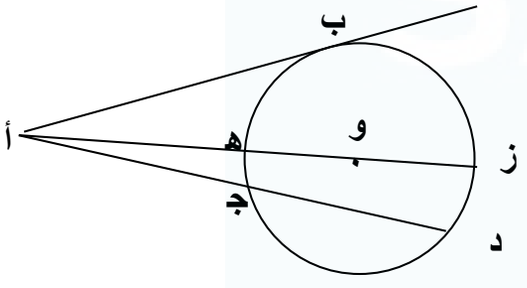
- في الشكل المقابل : أوجد قيمة س



الحل :

- في الشكل المقابل : أ ب قطعة مماسة ،

ا جـ = ٤ سم ، ا د = ٩ سم ، ا هـ = ٢ سم

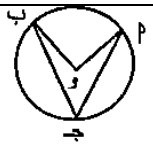
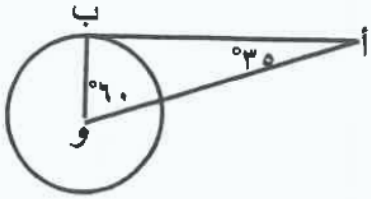
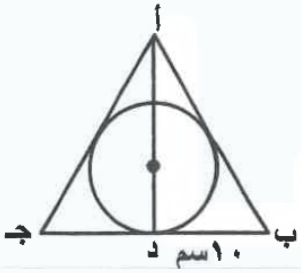
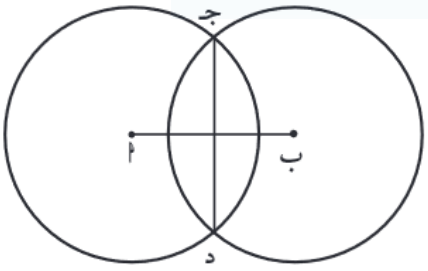


أوجد

- طول القطعة المماسة ا ب
- طول نصف قطر الدائرة

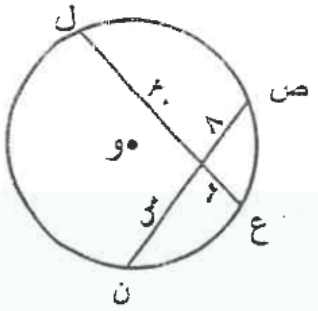
الحل :

ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

١	القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه.	
٢	في الشكل المقابل : إذا كان ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٨٠° فإن ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ٨٠° 	
٣	كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان .	
٤	في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{أ ب}$ يكون مماسًا للدائرة عند ب 	
٥	في الشكل المقابل : دائرة داخلة للمثلث أ ب جـ ، إذا كان المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع ، ب د = ١٠ سم فإن محيط المثلث أ ب جـ يساوي ٤٥ سم 	
٦	كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة .	
٧	إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٠ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة وذلك الوتر هو ٦ سم	
٨	القطر العمودي على وتر في الدائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه .	
٩	دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د. وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم. فإن طول أب يساوي ٨ سم. 	

١٠ **قياس الزاوية المركزية يساوي نصف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس**

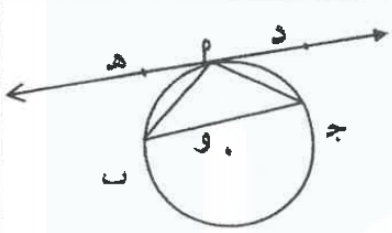
١١ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overline{ص ن}$ ، $\overline{ع ل}$ وترين متقاطعين فيها كما هو موضح في الشكل فإن قيمة س =



أ) ٢٢ ب) ١٥

ج) ٨ د) ١٢

١٢ **في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{د هـ}$ مماس لها عند النقطة م ، ق(هـ م ب) = ٤٥° ق(م ∡ جـ) = ٣٥°**



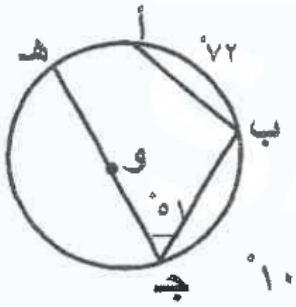
فإن ق(جـ م ب) =

أ) ٧٠° ب) ٨٠°

ج) ٩٠° د) ١٠٠°

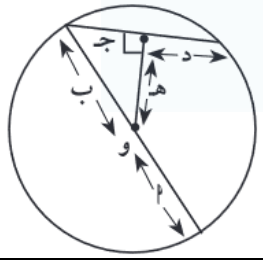
١٣ **من الشكل المقابل : إذا كان ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٧٢° ،**

ق ($\overset{\frown}{ب جـ هـ}$) = ١٥٠° فإن ق($\overset{\frown}{أ هـ}$) =



أ) ٣٠° ب) ٦٨° ج) ٧٢° د) ١٠٢°

١٤ في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:

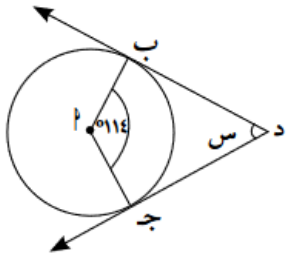


(أ) جـ = د (ب) م = ب

(جـ) جـ^{٢} + هـ^{٢} = ب^{٢} (د) هـ = د

١٥

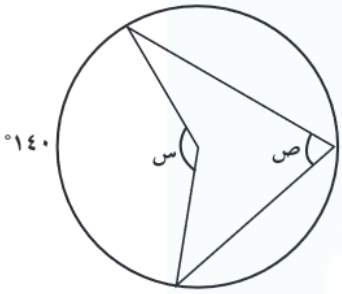
إذا كان دب، دجـ مماسان للدائرة. فإن س =



(أ) ٢٦°　(ب) ٥٧°　(جـ) ٦٦°　(د) ١١٤°

١٦

في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:

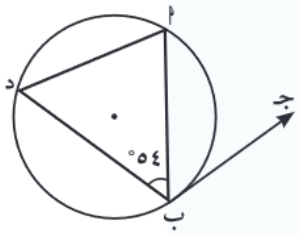


(أ) ٢٨٠°، ١٤٠°　(ب) ٧٠°، ٣٥°

(جـ) ١٤٠°، ٤٠°　(د) ١٤٠°، ٧٠°

١٧

في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب د) = ١٤٠°، فإن ق(أ ب جـ) =

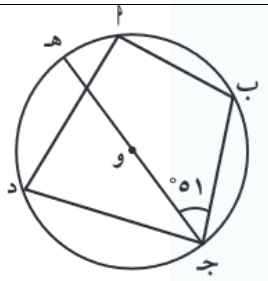


(أ) ٧٠°　(ب) ٥٠°　(جـ) ٥٦°　(د) ١٢٤°

١٨

في الشكل المقابل، إذا كان ق(أب) = ٧٢°، ق(ب جـ هـ) = ٥١°.

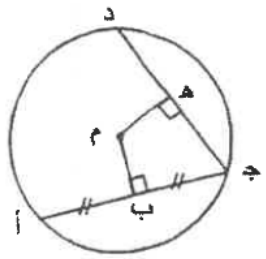
فإن قياس القوس هـ أ =



(أ) ٣٠°　(ب) ١٠٢°　(جـ) ٧٢°　(د) ٦٨°

سما
SAMA

١٩



في الشكل المقابل إذا كان م مركز الدائرة ، أب = ١٢ سم

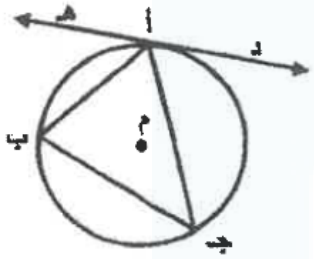
م ب = م هـ ، فإن طول $\overline{جـ د}$ =

أ ٦ سم ب ١٢ سم جـ ٢٤ سم د ٣٦ سم

٢٠

في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماساً للدائرة عند أ ، ق (هـ أ ب) = ٦٠°

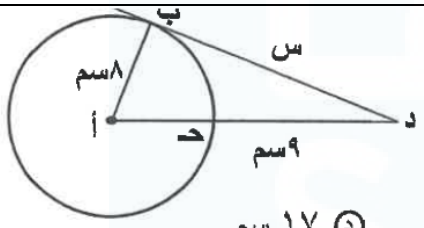
، ق (جـ ب أ) = ٧٠° فإن ق (جـ أ ب) =



أ ٥٠° ب ٦٠°

جـ ٧٠° د ١٣٠°

٢١



في الشكل المقابل دائرة مركزها أ ونصف قطرها ٨ سم ،

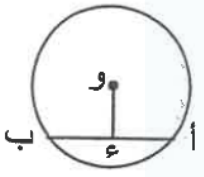
إذا كان $\overleftarrow{د ب}$ مماس للدائرة عند ب ، د جـ = ٩سم ، فإن س =

أ ٨ سم ب ٩ سم جـ ١٥ سم د ١٧ سم

٢٢

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، أب = ٦سم

و ء = ٤ سم ،طول نصف قطر الدائرة يساوي



أ ١٠سم ب ٦سم جـ ٥سم ء ٤ سم