مذكرة
الفصل الثاني
الرياضيات
ج2

11

العلمي

SAMA

WWW.SAMAKW.NET/AR

i teacher المعلم الذكي

الفصل الثاني
2026-2025

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

ثالثًا: دالة الظل

الدالة	المجال	المدى	الدورة
y= $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$	$\mathbb{R} - \left\{x : x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	π

خواص دالة الظل :

(1) ليس لها سعة

(2) لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$

(3) لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معروف

وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات راسية لبيان الدالة $y = \tan x$

(4) دالة فردية لأن $\tan(-x) = -\tan x \ , x \in D$

(5) **منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.**

حاول أن تحل ص (51)

(5) أوجد الدورة , ثم ارسم بيان الدالة:

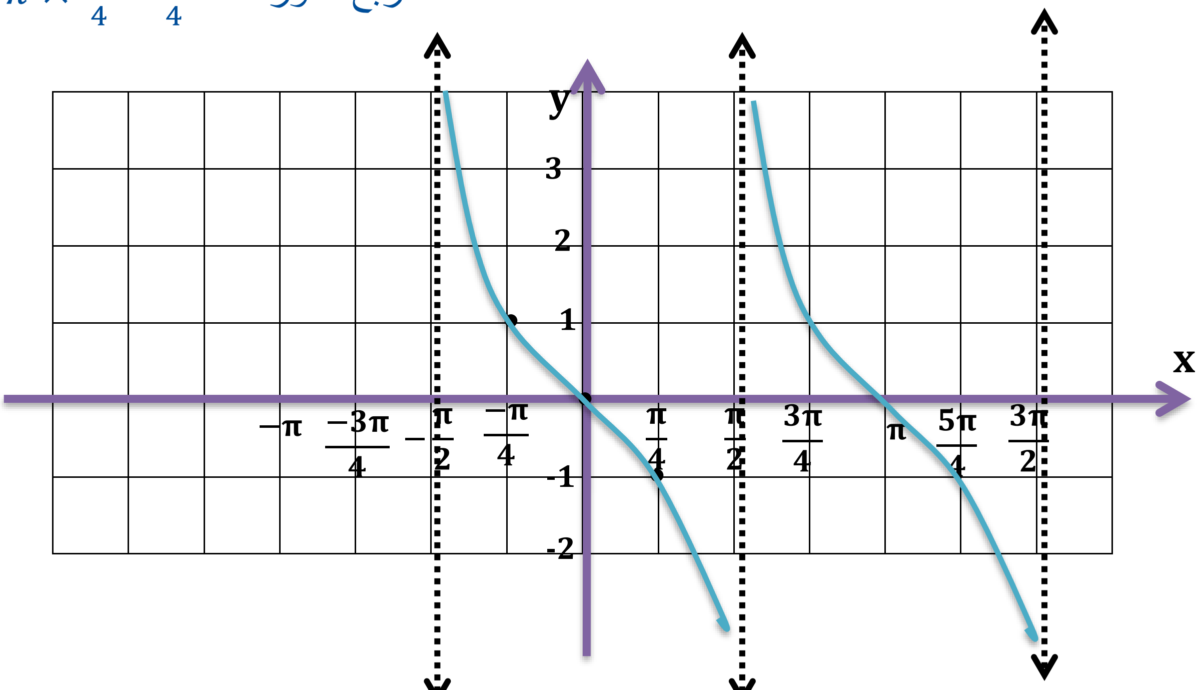
$y = \frac{1}{2} \tan x$ y = - tan x

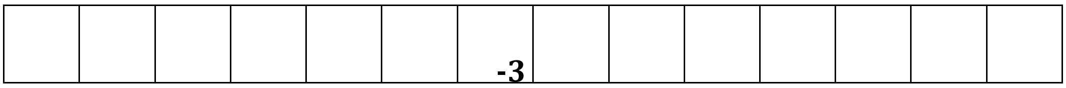
الحـل $\boldsymbol{y = -\tan x}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y = \tan x$	0	-1	غير معرف	1	0	-1	غير معرف	1	0

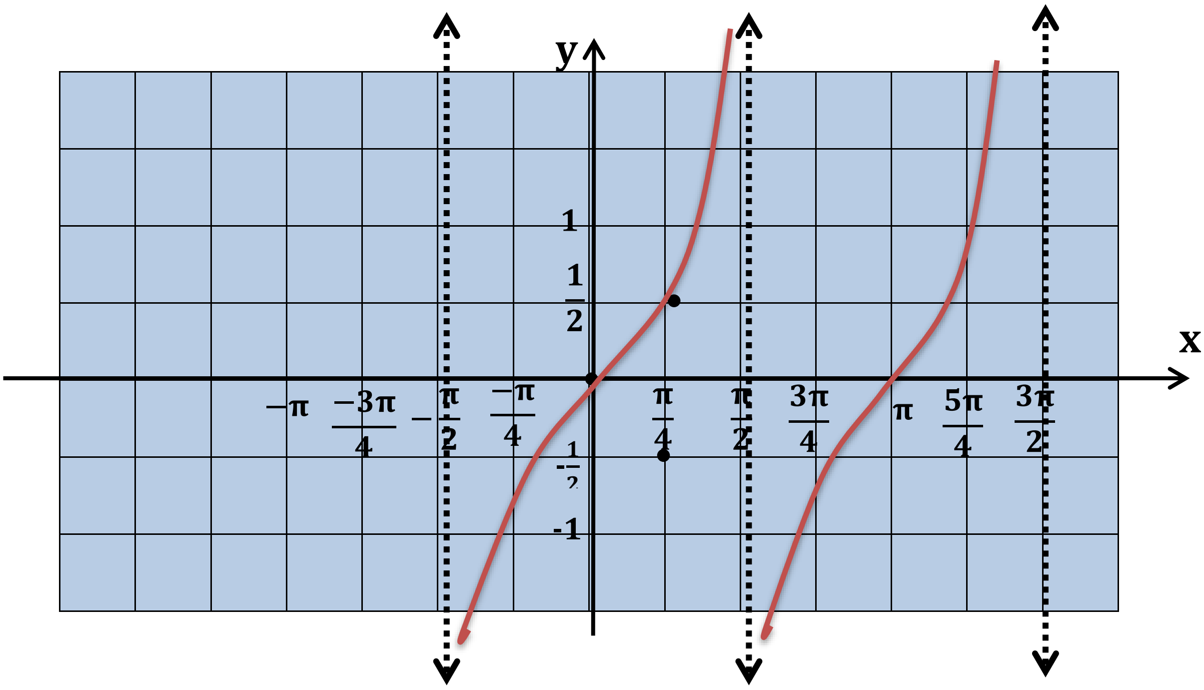
دورة الدالة هي $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|1|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

ربع الدورة = $\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$





(b) $y = \frac{1}{2}\tan x$



في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ — (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ — (a) (b)

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ — (a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4\cos(6x)$ — (a) (b)

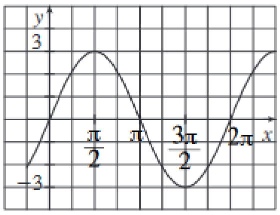
(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5 — (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ — (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة. — (a) (b)

في التمارين (17—8)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:



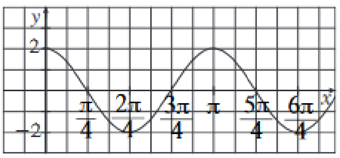
(a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = 3\sin x$

(c) $f(x) = -3\sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة = 1 (b) السعة = 2 (c) السعة = 3 (d) f ليس لها سعة

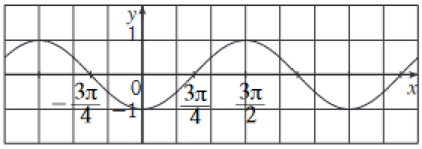
(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:



فإن f يمكن أن تكون:

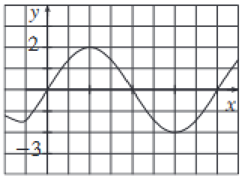
(a) $2\cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos\frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

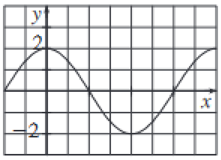
(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

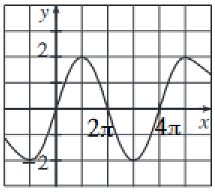


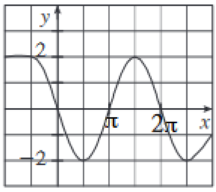
ⓐ π ⓑ 2π ⓒ 3π ⓓ $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x)=a\sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

ⓐ 

ⓑ 

ⓒ 

ⓓ 

(13) معادلة الدالة المثلثية $y=a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

ⓐ $y=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ⓑ $y=-4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ ⓒ $y=-4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ ⓓ $y=4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y=a\cos(bx)$ حيث $a=2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ⓑ $y=8\cos(8x)$ ⓒ $y=2\cos(8x)$ ⓓ $y=8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y=a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y=3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y=-3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ⓑ $y=3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y=-3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

ⓒ $y=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y=-3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ⓓ $y=3\sin(4x)$ أو $y=-3\sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y=\tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

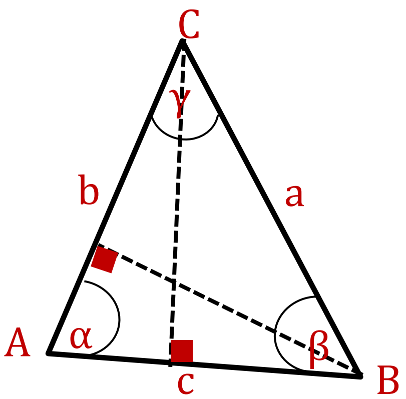
ⓐ $y=\tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ ⓑ $y=\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ ⓒ $y=\tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ ⓓ $y=\tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

(17) في الدالة المثلثية $y=-2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

ⓐ $-2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ ⓑ $2\ ,\ \frac{10\pi}{3}$ ⓒ $2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ ⓓ $2\ ,\ \frac{2\pi}{15}$

قانون الجيب

قانون الجيب : ينص قانون الجيب على أنه بالنسبة لكل زاوية من زوايا المثلث تكون النسبة بين جيب الزاوية وطول الضلع المقابل لها هي نسبة ثابتة، أي أن جيوب زوايا المثلث تتناسب مع أطوال الأضلاع المقابلة لها.

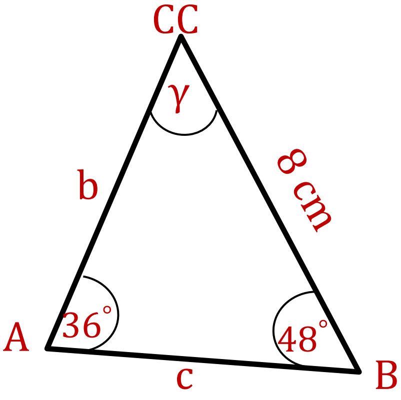


قانون الجيب
في أي مثلث A B C

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

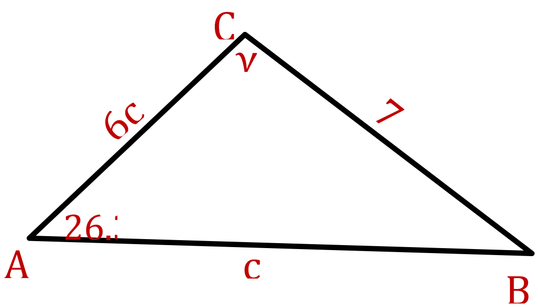
حاول أن تحل صـ (64) (1) حل $\Delta\, A\, B\, C$: $\alpha = 36^{\circ}$, $\beta = 48^{\circ}$, $a = 8\ cm$

الحـل



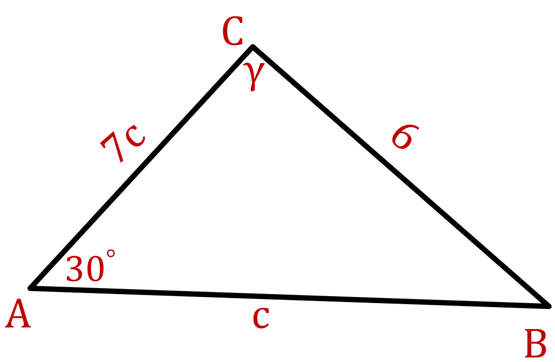
حاول أن تحل صـ (64) (2) حل $\Delta\, A\, B\, C$: $a = 7\ cm$, $b = 6\ cm$, $\alpha = 26.3^{\circ}$

الحل :



حاول أن تحل صـ (67) (3) حل $\Delta\, A\, B\, C$: $a = 7\ cm$, $b = 6\ cm$, $\alpha = 30^{\circ}$

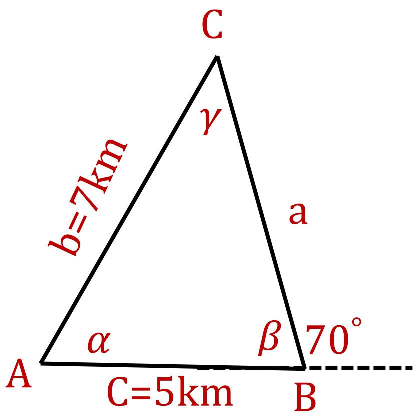
الحـل :



حاول أن تحل صـ (68)

(5) يمثل الشكل المقابل مسار اليخوت في أحد السباقات انطلاقًا من النقطة A إلى النقطة B ثم النقطة C ثم إلى النقطة A

أوجد مسافة السباق.



الحل :

$$\beta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

من قانون الجيب :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin 110^\circ}{7} = \frac{\sin\gamma}{5}$$

$$\sin\gamma = \frac{5\times\sin 110^\circ}{7} = 0.6712$$

$$\gamma = 42.16^\circ \implies ,\alpha = 180^\circ - 110^\circ - 40.16^\circ = 27.84^\circ$$

$$\frac{\sin 27.84^\circ}{a} = \frac{\sin 110^\circ}{7}$$

$$a = \frac{7\times\sin 27.84^\circ}{\sin 110^\circ} = 3.5$$

مسافة المطلوبة هي = $3.5 + 5 + 7$

=15.5 km

بنود موضوعية صفحة 26-27

في التمارين (1—3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100°$, $m(\widehat{B}) = 30°$, $BC = 20\,cm$ فإنّ: $AC = 10.154\,cm$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80°$, $AB = 12\,cm$, $AC = 16\,cm$ فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50°$ (a) (b)

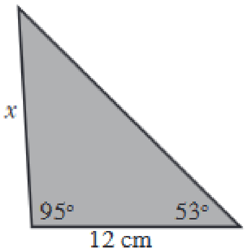
(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (a) (b)

في التمارين (4—9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{B}) = 40°$, $AC = 10\,cm$ فإنّ طولي $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm
(b) 6.53 cm , 13.47 cm
(c) 13.47 cm , 15.32 cm
(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالي:



(a) 8.6 cm
(b) 15 cm
(c) 18.1 cm
(d) 19.2 cm

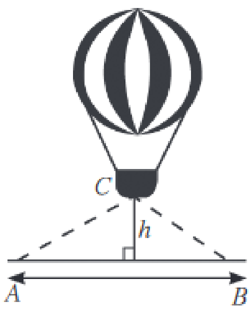
(6) مثلث قياسات زواياه: $70°, 60°, 50°$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالي:

(a) 11 cm
(b) 11.5 cm
(c) 12 cm
(d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56°$, $AC = 23\,cm$, $AB = 19\,cm$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

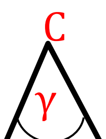
(a) 12 cm
(b) 18 cm
(c) 19 cm
(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

(8) رأى شخصان، أحدهما يقف عند النقطة A والثاني عند النقطة B، منطادًا، حيث المسافة بينهما 3 km. إذا كان قياس زاوية الارتفاع عند النقطة A هي 28° وقياس زاوية الارتفاع عند النقطة B هي 37°، فإنّ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض هو:



(a) $h \approx 1200\,m$
(b) $h \approx 2500\,m$
(c) $h \approx 940\,m$
(d) $h \approx 880\,m$

(8-4) قانون جيب التمام



قانون جيب التمام   في $\Delta\ A\ B\ C$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta$$

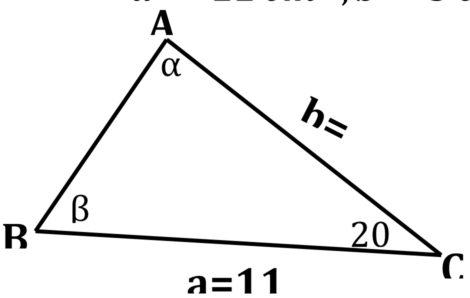
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2\,b\,a\,\cos\gamma$$

معلومـــــــة :

$$\cos\gamma = \frac{b^2+a^2-c^2}{2\,a\,b} \quad ، \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c} \quad ، \quad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c\,b}$$

حاول أن تحل صـ (72) حل $\Delta\ ABC$ حيث : $a = 11\ cm\ \ , b = 5\ cm\ \ , \gamma = 20^\circ$

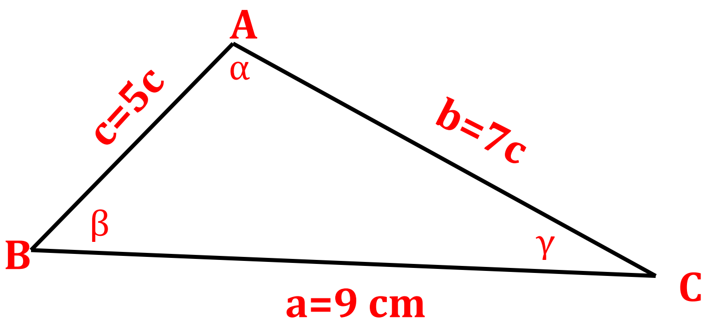
الحـل:



\\\\

حاول أن تحل صـ (72) (2) في $\Delta\ ABC$ حيث : $a = 9\ cm\ \ , b = 7\ cm\ \ ,\ c = 5\ cm$

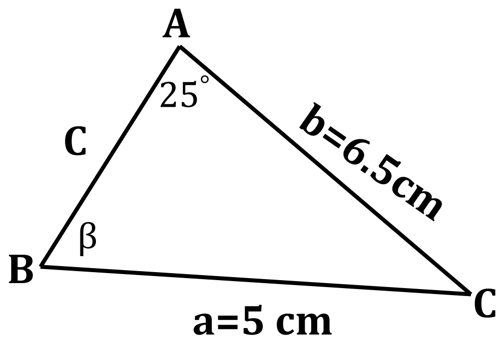
أوجد قياس الزاوية الأكبر.



حاول أن تحل صـ (72)

(3) **حل** $\boldsymbol{ABC}$ ∆ حيث : $\boldsymbol{a = 5\ cm\ \ , b = 6.5\ cm\ \ , \alpha = 25^{\circ}}$

الحل :



في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\text{ cm}$, $AC = 19\text{ cm}$, $BC = 27\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82°$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60°$, $BC = 44\text{ cm}$, $AB = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\text{ cm}$ (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\text{ cm}, 8\text{ cm}, 12\text{ cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالي $133.4°$ (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60°$, $AC = 10\text{ cm}$, $BC = 20\text{ cm}$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

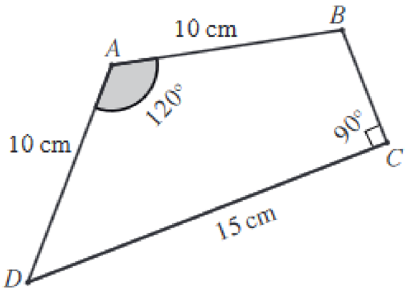
(a) $AB = 10\sqrt{7}\text{ cm}$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\text{ cm}$ (c) $AB = 12.4\text{ cm}$ (d) $AB = 29\text{ cm}$

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120°$, $AB = 30\text{ cm}$, $AC = 40\text{ cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\text{ cm}$ (b) $BC \approx 36\text{ cm}$ (c) $BC \approx 68\text{ cm}$ (d) $BC \approx 21\text{ cm}$

(7) إذا كان $BC = 25\text{ cm}$, $AC = 17\text{ cm}$, $AB = 12\text{ cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالي:

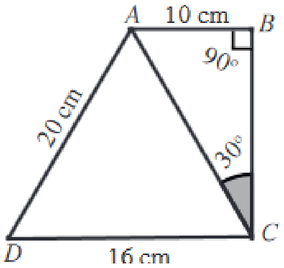
(a) $118°$ (b) $110°$ (c) $125°$ (d) $100°$



(9) في الشكل الرباعي $ABCD$ طول $\overline{BC}$ هو:

(a) 12.16 cm (b) 8.66 cm

(c) 11.5 cm (d) 13.7 cm



(10) في الشكل الرباعي $ABCD$، قياس الزاوية $(B\widehat{A}D)$ يساوي تقريبًا:

(a) $110°$ (b) $104°$

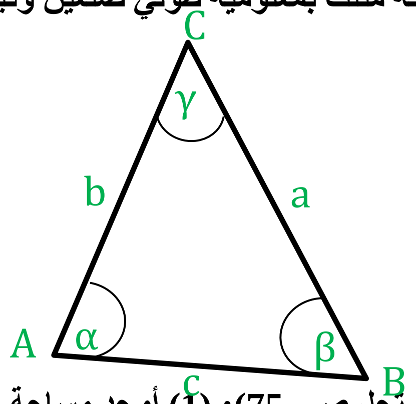
(c) $107°$ (d) $120°$

مساحة مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما كما يلي:

$$\boldsymbol{Area\ (ABC) = \frac{1}{2}\ b\ c\ \sin\alpha}$$

$$\boldsymbol{Area\ (ABC) = \frac{1}{2}\ a\ c\ \sin\beta}$$

$$\boldsymbol{Area\ (ABC) = \frac{1}{2}\ a\ b\ \sin\gamma}$$

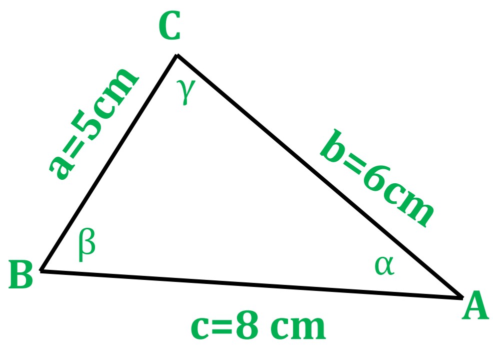


حاول أن تحل صـ 75): (1) أوجد مساحة المثلث ABC حيث a = 5 cm , b =6 cm , c = 8 cm:

الحــــــــــــــــل :

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c\,b} =$$

$$= \frac{6^2+8^2-5^2}{2\times6\times8} = \frac{25}{32}$$



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{25}{32}\right)^2$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{25}{32}\right)^2} = \frac{\sqrt{399}}{32}$$

$$\boldsymbol{Area\ (ABC) = \frac{1}{2}\ b\ c\ \sin\alpha}$$

$$\boldsymbol{Area\ (ABC) = \frac{1}{2} \times 6 \times 8\ \frac{\sqrt{399}}{32}} \approx 15cm^2$$

قاعدة هيرون: تعطى مساحة مثلث A B C أطوال أضلاعه a , b , c بالقاعدة:

$$\boldsymbol{Area\ (ABC) = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

حيث : (نصف محيط المثلث) $\boldsymbol{s = \frac{1}{2}(a+b+c) =}$

حاول أن تحل صـ (75)

(2) أوجد مساحة المثلث ABC حيث a = 5 cm , b =6 cm , c = 8 cm:

الحل:

حاول أن تحل صـ (75)

(2) أوجد مساحة المثلث *ABC* حيث $a = 4\ cm$, $b = 4\ cm$, $c = 3\ cm$:

باستخدام قانون هيرون

في التمارين (1—6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $AC = 9\text{ cm}$, $AB = 7\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 15 cm^2 (a) (b)

في التمارين (7—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40°$, $b = 3\text{ cm}$, $a = 2\text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي:

(a) 4.6 cm^2 (b) 3.86 cm^2

(c) 1.93 cm^2 (d) 2.3 cm^2

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 7 cm , 8 cm , 9 cm هي:

(a) $6\sqrt{15}\text{ cm}^2$ (b) $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$

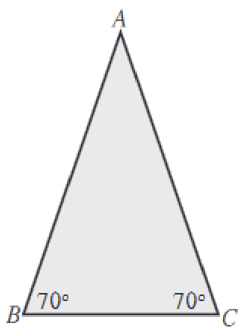
(c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (d) $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

(a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\text{ units}^2$ (b) $a^2\text{ units}^2$

(c) $\frac{1}{2}a^2\text{units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 8 cm^2 فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالي:



(a) 5 cm (b) 8 cm

(c) 4 cm (d) 6 cm

بنود موضوعية ص 34-35

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=\dfrac{\sin^2 x+\tan^2 x+\cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x)=\sec x$ — (a) (b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=(\sec^2 x+\csc^2 x)-(\tan^2 x+\cot^2 x)$ هي: $E(x)=2$ — (a) (b)

(3) المقدار: $E(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$ هو: $E(x)=1+\sin x$ — (a) (b)

(4) المقدار: $E(x)=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x)=\sec^2 x$ — (a) (b)

(5) المقدار: $E(x)=\csc x-\cos x\cot x$ هو: $E(x)=\cos x$ — (a) (b)

في التمارين (6—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) المقدار: $E(x)=\dfrac{\tan^2 x}{1-\sec^2 x}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x)=$

(a) 1 (b) -1 (c) $\tan^4 x$ (d) $-\tan^4 x$

(7) المقدار: $E(x)=\dfrac{1}{\sec x+1}-\dfrac{1}{\sec x-1}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x)=$

(a) $2\tan^2 x$ (b) $-2\tan^2 x$ (c) $2\cot^2 x$ (d) $-2\cot^2 x$

(8) تحليل المقدار: $E(x)=\cos^2 x+\dfrac{3}{\sec x}+2$ إلى عوامل هو: $E(x)=$

(a) $(1-\cos x)(2+\cos x)$ (b) $(1+\cos x)(2+\cos x)$

(c) $(1+\cos x)(2-\cos x)$ (d) $(1-\cos x)(2-\cos x)$

(9) الدالة $f(x)=\sqrt{\sec^2 x-1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x)=$

(a) $\tan x$ (b) $-\tan x$ (c) $\cot x$ (d) $|\tan x|$

(10) الدالة $f(x)=\sqrt{\csc^2 x-1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x)=$

(a) $|\cot x|$ (b) $\tan x$ (c) $-\cot x$ (d) $\cot x$

(2 - 9)   إثبات صحة متطابقات مثلثية

لإثبات صحة متطابقة يمكن استخدام إحدى الإستراتيجيات التالية :

1) تبسيط الطرف الأيمن بصورة الطرف الأيسر أو العكس .

2) تبسيط كل من الطرفين على حدة حتى يتطابق ناتج تبسيطهما .

و يكون ذلك باستخدام الطرق التالية :

حاول أن تحل(1) صفحة (88) **أثبت صحة المتطابقة :**

$$\frac{sin\theta}{1+cos\,\theta}+\frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}=\ 2\csc\theta$$

الحل :

$\therefore$

حاول أن تحل(2) صفحة (89) **أثبت صحة المتطابقة .**

$$\frac{\mathbf{1+sinx}}{\mathbf{1-sinx}}-\frac{\mathbf{1-sinx}}{\mathbf{1+sinx}}=\ \ \mathbf{4\,tan\,x\,sec\,x}$$

الطرف

$\therefore$

حاول أن تحل(3) صفحة (90) **أثبت صحة المتطابقة .**

$$\frac{\mathbf{1-cosx}}{\mathbf{1+cosx}}=(\ \mathbf{csc\,x-cot\,x})^2$$

الحل:

دحاول أن تحل(4) صفحة (90) أثبت صحة المتطابقة .

$$\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \ \tan^2 x$$

الحل :

البنود الموضوعية 36-37

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$ (b) $\sin x \sec^2 x$ (c) $\cos x \sec^2 x$ (d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x \cos x$ (b) 2 (c) -2 (d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$ (b) $\sec x \sin x$ (c) $\sec x \cos x$ (d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$ (b) $\cot^2 x$ (c) $\tan^2 x \sin^2 x$ (d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$ (b) $-\tan x$ (c) $\tan x \sin x$ (d) $\tan x$

(3 - 9) حل معادلات مثلثية :

إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول، فإن الزاوية $(\pi - \theta)$ تقع في الربع الثاني و يكون

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$$

ويكون حل المعادلة:

$$\sin x = \sin\theta$$

هو:

$$x = \theta + 2k\pi \quad , \quad x == (\pi - \theta) + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$$

إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول فإن الزاوية $(-\theta)$ تقع في الربع الرابع ويكون

$$\cos\theta = \cos(-\theta)$$

ويكون حل المعادلة:

$$cos\, x = \cos\theta$$

هو:

$$x = \theta + 2k\pi \quad , \quad x == (-\theta) + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$$

إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث ويكون

$$tan\,\theta = tan(\pi + \theta)$$

ويكون حل المعادلة:

$$tan\, x = tan\,\theta$$

هو:

$$x = \theta + k\pi \quad , \quad k \in Z$$

حاول أن تحل(1) صفحة (93) **حل المعادلة :** $\sqrt{2}\cos x = 1$

الحل

حاول أن تحل(2) صفحة (94) **حل المعادلة :** $5\ \sin\theta - 3\ = \sin\theta$

الحل :

حاول أن تحل(3) صفحة (95) **حل المعادلة :** $tan\ x = 1$

الحل : **نفرض أن** α **هي زاوية الأسناد للزاوية x**

$$tan\ x = tan\ \frac{\pi}{4}\quad ,$$

$$tan\ \ x > 0$$

x تقع في الربع الأول أو الربع الثالث

$$x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi\qquad , \ k\ \in\ Z$$

حاول أن تحل(4) صفحة (96) **حل المعادلة :** $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

الحل :

حاول أن تحل(5) صفحة (97) حل المعادلة : $\cos^2\theta + 3\cos\theta + 2 = 0$

الحـل

\

البنود الموضوعية 38-39

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول (b) الأول أو الثالث (c) الثالث (d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$ (c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (c) $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.

(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (d) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي:

(a) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\right\}$ (b) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$ (c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right\}$ (d) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

(4 - 9) متطابقات المجموع و الفرق :

متطابقات:

$\boldsymbol{cos\,(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta}$	$\boldsymbol{tan\,(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta}$	$\boldsymbol{sec\,(\frac{\pi}{2}-\theta) = \csc\,\theta}$
$sin\,(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$	$\cot\,(\frac{\pi}{2}-\theta) = \tan\,\theta$	$\boldsymbol{csc\,(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sec\theta}$

حاول أن تحل(1) صفحة (100) أثبت أن :

$$\cos\,(\,\theta-\frac{\pi}{2}) = \sin\theta$$

$$cos\,(\,\theta-\frac{\pi}{2}) = cos\,(\,-(\frac{\pi}{2}-\theta)) = cos\,(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل(2) صفحة (101) أثبت أن :

$$\sec\,(\,\theta-\frac{\pi}{2}) = \csc\theta$$

متطابقات المجموع و الفرق :

$$cos\,(\,\beta-\,\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

$$cos\,(\,\beta+\,\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

$$sin\,(\,\beta+\,\alpha) = sin\,\beta\,cos\,\alpha + cos\,\beta\,sin\,\alpha$$

$$sin\,(\,\beta-\,\alpha) = sin\,\beta\,cos\,\alpha - cos\,\beta\,sin\,\alpha$$

$$tan\,(\,\beta+\,\alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$tan\ (\ \beta - \ \alpha) = \frac{\tan\beta\ - \ \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

حاول أن تحل(3) صفحة (103) أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة .

(c) $tan\ 105°$ (b) $cos\ 75°$ (a) $sin\ 15°$

الحل :

حاول أن تحل(4) صفحة (104) : أوجد كلا مما يلي :

$(c)\ sin\ (\ \beta - \ \alpha)$ $(\ b)\ \ tan\ (\ \beta + \ \alpha)$ $(a)\ \ cos\ (\ \beta + \ \alpha)$

الحـــــــــــــــــل :

(5 - 9)   متطابقات ضعف الزاوية و نصفها :

متطابقات ضعف الزاوية :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\ \cos\theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

حاول أن تحل(1) صفحة (105) أثبت صحة : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$

الحل :

حاول أن تحل(2) صفحة (106) إذا كان : $\sin x = \frac{5}{13}$ فأوجد $\cos 2x$

الحل :

حاول أن تحل(3) صفحة (106)

إذا كان : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2x$

الحـل :

حاول أن تحل(4) صفحة (107) إذا كان : $\tan\theta = \sqrt{3}$ فأوجد $\tan 2\theta$

الحـل : $\tan\ 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$

حاول أن تحل(5) صفحة (107)

أثبت صحة المتطابقة : $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

الحـل :

حاول أن تحل(6) صفحة (108) **أثبت صحة المتطابقة :** $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

الحـــل

متطابقات نصف الزاوية :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

حاول أن تحل(7) صفحة (109) أوجد باستخدام متطابقات نصف الزاوية : $\cos 15°$

الحـل :

حاول أن تحل(8) صفحة (109)

إذا كان : $180° < \theta < 270°$ $\sin\theta = \frac{-24}{25}$ فأوجد $\tan\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$

الحـل :

البنود الموضوعية صفحة 40-41

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(2) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(3) $\cos(h+\frac{\pi}{2}) = -\cos h$ (a) (b)

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$ (a) (b)

في التمارين (5—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (c) $2+\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (b) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

ⓐ $1+\tan h$ ⓑ $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$ ⓒ $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ ⓓ $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ ⓑ $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$ ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ$ تساوي:

ⓐ $\cos 112^\circ$ ⓑ $\cos 76^\circ$ ⓒ $\sin 112^\circ$ ⓓ $\sin 76^\circ$

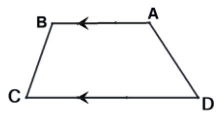
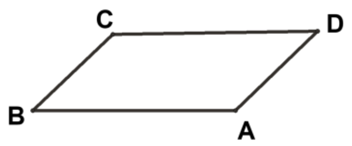
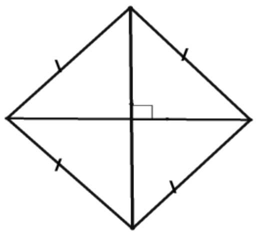
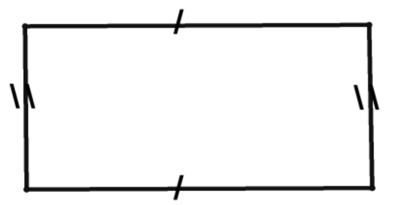
(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

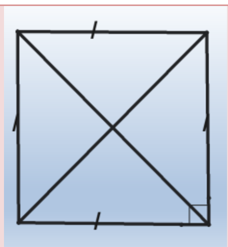
ⓐ $\cos\frac{4\pi}{21}$ ⓑ $\sin\frac{4\pi}{21}$ ⓒ $\cos\frac{10\pi}{21}$ ⓓ $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

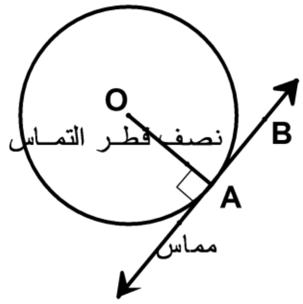
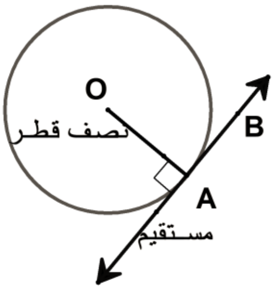
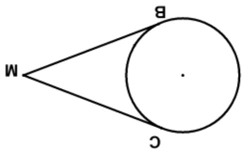
ⓐ $\tan\frac{2\pi}{15}$ ⓑ $\tan\frac{8\pi}{15}$ ⓒ $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ ⓓ $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

نظريات ونتائج سابقة هامة في هندسة

خواص الأشكال الرباعية :			
شبه المنحرف	متوازي الأضلاع	المعين	المستطيل
 فيه ضلعان متقابلان متوازيان .			
	كل ضلعان متقابلان متوازيان.	أضلاعه الأربعة متطابقة .	كل ضلعان متقابلان متطابقان
	كل ضلعان متقابلان متطابقين.	كل زاويتان متقابلتان متطابقتان.	كل ضلعان متقابلان متوازيان
	كل زاويتان متقابلتان متطابقتان.	القطران ينصف كل منهما الآخر و متعامدان و ينصفان زواياه .	زواياه الأربع قوائم.
	القطران ينصف كل منهما الآخر .		القطران ينصف كل منهما الآخر و متطابقان

المربع		أضلاعه الأربعة متطابقة .	القطران متطابقان و متعامدان و ينصف كل منهما الاخر
		القطر يصنع زاوية قياسها 45° مع أي ضلع من اضلاعه.	

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع اذا تحقق			
1)توازى كل ضلعين متقابلين فيه.	**2)تطابق كل ضلعين متقابلين فيه.** **3)تطابقت كل زاويتين متقابلتين فيه**	**4)تطابقا و توازى ضلعان متقابلان فقط.**	**5)نصف القطران كل منهما الآخر**
يكون الشكل الرباعي معينا إذا كان: **متوازي أضلاع و تطابق ضلعان متجاوران فيه.**		**يكون الشكل الرباعي مستطيلا إذا كان:** متوازي أضلاع و أحدى الزوايا قوائم.	

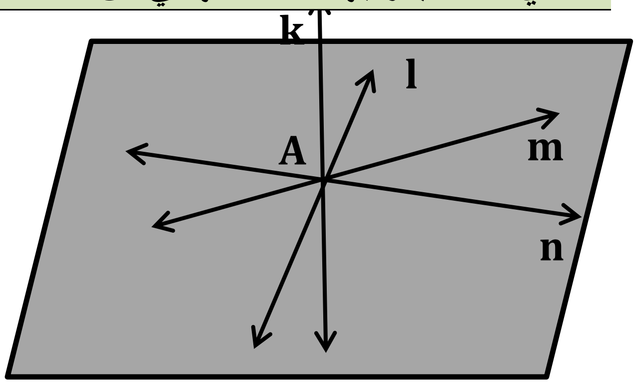
المماس عمودي على نصف قطر التماس	المستقيم العمودي على نصف القطر من نهاية يكون مماس للدائرة	**القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان**
		

(10-1) المستقيمات والمستويات في الفضاء

مسلمات(موضوعات) الفضاء

يرتكز بناء علم الهندسة على مجموعة من النظريات الهندسية التي يتم إثباتها انطلاقًا من التسليم بصحة عبارات رياضية أولية نقبلها دون برهان تسمي **(الموضوعات)** أو **(المسلمات)**

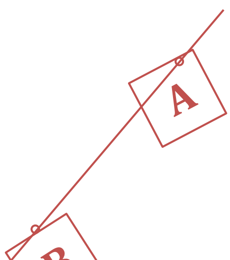
أي نقطة يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات في المستوي أو في الفضاء



نقطة واحدة
عدد لانهائي من المستقيمات

(a

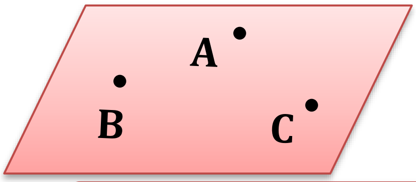
(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).
(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.



نقطتان مختلفان
مستقيم واحد فقط

b) (i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

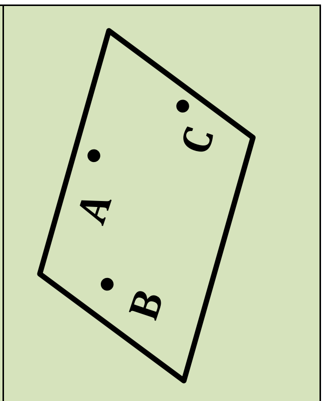
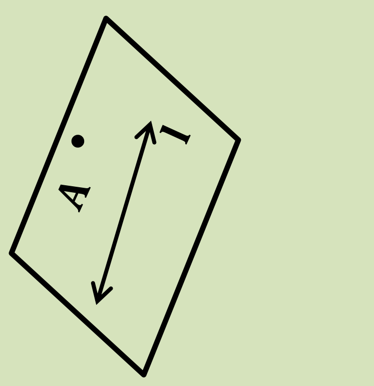
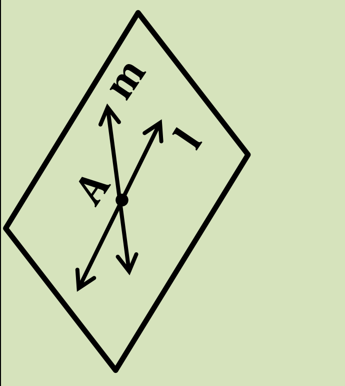
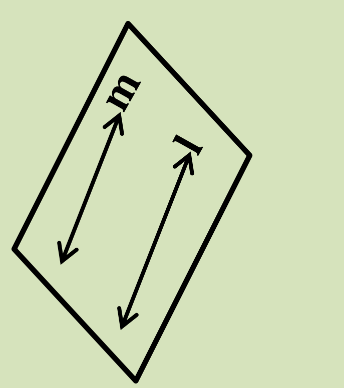
A,B,C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة



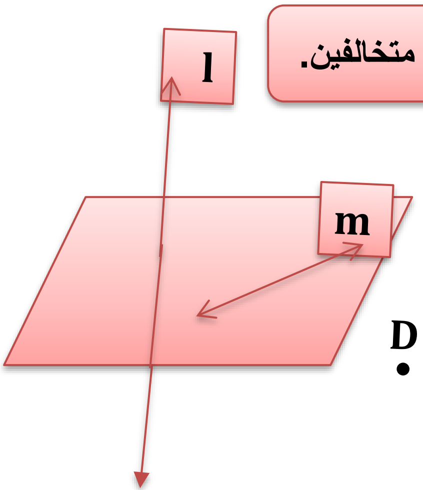
(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

حالات تعيين المستوي في الفضاء:

- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

			
ثلاث نقاط غير مستقيمة	مستقيم ونقطة خارجة عنه	مستقيمان متقاطعان	مستقيمان متوازيان

(ii) المستقيمان اللذان لا يمكن أن يحويهما مستوٍ واحد يسميان مستقيمين متخالفين.



يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.