سما
SAMA

مذكرة
الفصل الثاني

الرياضيات
ج1

11

العلمي

WWW.SAMAKW.NET/AR

i teacher
المعلم الذكي

الفصل الثاني
2026-2025

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

محتوى المذكرة

البند	الدرس	الصفحة
	الوحدة السابعة : الأعداد المركبة	
(7 – 1)	الأعداد المركبة	
(7 – 2)	الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب	
(7 – 3)	حل معادلات	
	الوحدة الثامنة: حساب المثلث	
(8 – 1)	التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)	
(8 – 2)	التحويلات الهندسية للدوال الجيبية	
(8 – 3)	قانون الجيب	
(8 – 4)	قانون جيب التمام	
(8 – 5)	مساحة المثلث	
	الوحدة التاسعة: المتطابقات المثلثية	
(1 – 9)	**المتطابقات المثلثية (معلق)**	
(2 – 9)	**إثبات صحة متطابقات مثلثية**	
(3 – 9)	**حل معادلات مثلثية**	
(4 – 9)	**متطابقات المجموع والفرق**	
(5 – 9)	**متطابقات ضعف الزاوية ونصفها**	
	الوحدة العاشرة: هندسة الفضاء	
(10 – 1)	**المستقيمات والمستويات في الفضاء**	
(10 – 2)	**المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء**	
(10 – 3)	**تعامد مستقيم مع مستوى**	
(10 – 4)	**الزاوية الزوجية**	
(10 – 5)	**المستويات المتعامدة**	
	الوحدة الحادية عشر: الجبر المتقطع	
(11 – 1)	**مبدأ العد و التباديل والتوافيق**	
(11 – 2)	**نظرية ذات الحدين**	
(11 – 3)	**الاحتمال**	

(1 – 7) الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية : هي العدد الذي مربعه (1-) ويرمز إليه بالرمز i أي أن $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$

الأعداد التخيلية : لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

تسمى الأعداد التي على الصورة $b\,i$ *حيث* $b \in \mathbb{R}^*$ *أعداد تخيلية*

حاول أن تحل صـ (13) (1) بسّط كل عدد مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i .

(a) $\sqrt{-2}$ **(b)** $-\sqrt{-12}$ **(c)** $\sqrt{-36}$

الحل :

تعريف : العدد المركب هو عدد على الصورة **a + b i** حيث **a , b** عددان حقيقيان ، $i = \sqrt{-1}$

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة **z = a + b i**

الجزء الحقيقي

الجزء التخيلي

الصورة الجبرية للعدد المركب

(1) صـ 13 : أكمل الجدول التالي .

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	العدد المركب
3	2	2+3i
-5	4	4 -5i
1	-1	i -1
0	7	7
-1	0	-i

حاول أن تحل صـ (14) (2) اكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية .

(a) $\sqrt{-18} + 7$ **(b)** $\frac{10 - \sqrt{-100}}{5}$ **(c)** $\frac{\sqrt{-9} + 5}{7}$

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان .

ليكن : $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \;, b_1 = b_2$

حاول أن تحل صـ (15)

(3) أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ **في كل مما يلي :**

$(a)\;\; x + 5i = 7 - 3i\, y \qquad (b)\;\; (x - 3) + y2\, i = 5 - y\, i$

$(c)\;\; 3i = 2x - 5yi$

الحل : $(a)\;\; x + 5i = 7 - 3i \qquad z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \;, b_1 = b_2$

$\therefore x = 7 \quad , \quad 5 = -3\, y \Longrightarrow y = -\frac{5}{3}$

ملاحظة : إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي صفراً وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضا

$x + y\, i = 0 \quad \Longrightarrow (\, x = 0 \;,\; y = 0\,)$

<u>التمثيــــل البياني لعدد مركب :</u> الصورة الديكارتية للعدد المركب :

$z = a + bi \longleftrightarrow \mathbf{M}\,(\, a\,, b\,)$

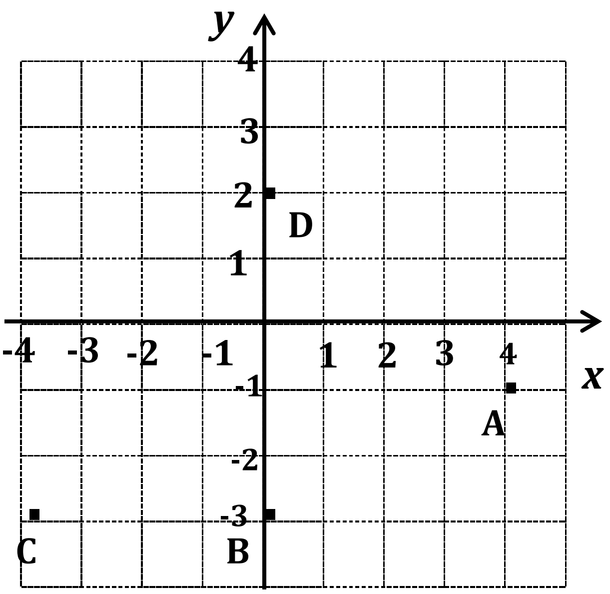
العدد المركب **الصورة الديكارتية**

ملاحظات : كل نقطة في المستوى تمثل **عددًا مركبًا** ، وكل **عدد مركب** يناظر (تمثله)نقطة في مستوى الإحداثي

ويسمى السينات المحور الحقيقي ويسمى محور الصادات بالمحور التخيلي

حاول أن تحل صـ (16) (4) مثل كلاً مما يلي في المستوي المركب :

(a) $z_1 = 4 - i$ (b) $z_2 = -3i$ (c) $z_3 = -4 - 3i$ (d) $z_4 = 2$



الحل :

(a)	$z_1 = 4 - i$	تمثله النقطة	A(4,-1)
(b)	$z_2 = -3i$	تمثله النقطة	B(0,-3)
(c)	$z_3 = -4 - 3i$	تمثله النقطة	C(-4,-3)
(d)	$z_4 = 2$	تمثله النقطة	D(2,0)

حاول أن تحل صـ (16)

(5) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقطتين : $N(-4,1), K(7,0)\ , H(1,-2)$

الحـل :

النقطة $K(7,0)$	يمثل العدد المركب	$z_1 = 7 + 0i = 7$
النقطة $H(1,-2)$	يمثل العدد المركب	$z_1 = 1 - 2i$
النقطة $N(-4,1)$	يمثل العدد المركب	$z_1 = -4 + i$

العمليات على مجموع الأعداد المركبة : أولاً :

جمع وطرح الأعداد المركبة . إذا كان : $z_1 = a_1 + b_1 i \ , z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

خواص عملية على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة

الخاصية	$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجمعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

حاول أن تحل صـ (17) إذا كان $z_1 = -2+5i$, $z_2 = 3.4-1.2i$, $z_3 = -0.3i$
فأوجد

$(a)\ z_1 + z_2$ $(b)\ z_2 - z_1$ $(c)\ z_3 - z_2 - z_3$

ملاحظات :

- الصفر هو العنصر المحايد الجمع على الأعداد المركبة (0 =0 + 0 i)
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلا منها معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح

أي أن : $\boldsymbol{z_1 = -z_2}$, $\boldsymbol{z_1 + z_2 = 0}$

- لإيجاد ناتج طرح $\boldsymbol{z_1 - z_2}$ يمكن إضافة المعكوس لـ z_2 إلى z_1 أي أن $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

ثانيًا : ضرب الأعداد المركبة .

الخاصية	$\forall\ \boldsymbol{z_1, z_2, z_3} \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجمعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = (z_1 \times z_2) - (z_1 \times z_3)$
العنصر المحايد	1=(1+ 0i)
تذكر أن $\boldsymbol{i^2 = -1}$	

حاول أن تحل صـ (19) (7) أوجد الناتج :

$(a)\ (6-5i)(4-3i)$ $(b)\ (9+4i)(4-9i)$ $(c)\ (12i)(7i)(i+1)$

إذا كان $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$

$z_1 = a_1 + b_1 i \quad , z_2 = a_2 + b_2 i$

$c\, z_1 = c\, a_1 + c\, b_1\, i$

$z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$

حاول أن تحل صـ (20) (8) إذا كان $z_1 = 2 - 3i \; , z_2 = 1 + 4i$

(a) $\frac{1}{2} z_1$ **(b)** $z_1 . z_2$

قوى العدد المركب : قوى (i)

$i^2 = -1 \quad , i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i \quad , i^4 = i^2 \times i^2 = 1$

إذا كان p عدداً كلياً $i^{4p} = 1 \quad , i^{4p+1} = i \quad , i^{4p+2} = -1 \quad , i^{4p+3} = -i$

عن رفع (i) لعدد كلي فإن الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-1, 1, i, -i\}$

حاول أن تحل صـ (21) (9) أوجد :

(a) $5(i)^{73}$

الحل

ثالثاً : قسمة الأعداد المركبة :   مرافق العدد المركب .

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ **هو العدد المركب** $\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

خـــــــواص المرافق :   **إذا كان** $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , z_2 = a_2 + b_2 i$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$	$z_1 + \overline{z_1} = 2a$
$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$	$z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
$\overline{(\bar{z})} = z$	$z_1 . \overline{z_1} = {a_1}^2 + {b_1}^2$

حاول أن تحل صـ (22)   (10)   **إذا كان** $z_1 = 2 - 7i \quad , z_2 = 3 + 5i$ **فأوجد :**

$(a)\ \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad (b)\ \overline{z_1 - z_2} \qquad (c)\ \overline{z_1 . z_2} \qquad (d)\ \overline{z_1} . \overline{z_2}$

الحـل :

تدريب : استخدم خواص المرافق أعلاه في حل المثال (11) السابق : صـ (22)

إذا كان $z_1 = 3 + 4i \quad , z_2 = 5 - 2i$ **فأوجد :**

$z_1 + \overline{z_1}$	$z_1 - \overline{z_1}$	$\overline{(\overline{z_1})}$
$\overline{z_1 + z_2}$	$\overline{z_1} . \overline{z_2}$	$\overline{z_1 . z_2}$

الحـــــــــــل :

$\bar{z}_1 = 3 - 4i \quad , \bar{z}_2 = 5 + 2i \quad , \ z_1 = 3 + 4i \quad , z_2 = 5 - 2i$

(a) $z_1 + \overline{z_1} = 2\,a_1 = 2(3) = 6$

(b) $z_1 - \overline{z_1} = 2\,b_1 i = 2(4) = 8$

$\overline{(\overline{z_1})} = z_1 \quad = 3 + 4i$

(c) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2} = (3-4i) + (5+2i) = 8-2i$

(d) $\bar{z_1}.\bar{z_2} = (3-4i)(5+2i) = 15-(4\times -2)+6i-20i$ = 23 -14i

(f) $\overline{z_1.z_2} = \bar{z_1}.\bar{z_2} = 23 - 14$ i

- العنصر المحايد لعملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة هو 1 +0 I
- المعكوس الضربي للعدد z = a +bi هو z^{-1}

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i$$

حاول أن تحل صـ (23) (11) أوجد المعكوس الضربي لكل من :

(a) $z_1 = -3\,i - 7$ (b) $z_2 = 5 + 11i$ (c) $z_3 = 6i$

حاول أن تحل صـ (23) (12) أوجد ناتج قسمة 3- 2i على 1+2i

الحـــــــــل :

حاول أن تحل صـ (23) (13) اكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية .

(a) $\frac{3+i}{2+5i}$ **(b)** $\frac{2-i}{2+i}$ **(c)** $\frac{\overline{5+i}}{\overline{2-3i}}$

بنود موضوعية صفحة 10-11

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ — (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z=3+4i$ هو: $\overline{z}=-3-4i$ — (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=3-2i$ هو: $-z=3+2i$ — (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ — (a) (b)

في التمارين (5—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

(a) $-15+6i$ (b) $6+15i$ (c) $6-15i$ (d) $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

(a) $x=5\ ,\ y=-2$ (b) $x=-5\ ,\ y=-2$ (c) $x=-5\ ,\ y=2$ (d) $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$: فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ (d) $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

ⓐ $18+17i$ ⓑ $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

ⓒ $6+17i$ ⓓ 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

ⓐ $z=-3+4i$ ⓑ $z=5+4i$ ⓒ $z=-3$ ⓓ $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

ⓐ $z=14+13i$ ⓑ $z=14-13i$ ⓒ $z=2-11i$ ⓓ $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

ⓐ $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ ⓑ $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

ⓒ $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ⓓ $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

ⓐ $-i$ ⓑ i ⓒ 1 ⓓ -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

ⓐ $\mathbb{Z}^+$ ⓑ $\{0,2,4,6,...\}$ ⓒ $\{1,3,5,...\}$ ⓓ $\{2,4,6,...\}$

(7-2)الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب :

إذا كان z = a +bi فإن القيمة المطلقة للعدد المركب $|z|=|a+b\,i|=\sqrt{a^2+b^2}$

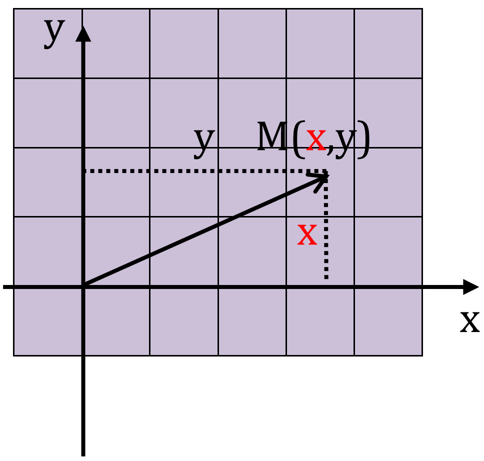
حاول أن تحل ص (26) (1) أوجد : (a) $|6-4\,i|$ (b) $|-2+5\,i|$

الحـــــــــــــل

(a) $|6-4\,i|=\sqrt{(6)^2+(-4)^2}=2\sqrt{13}$

(b) $|-2+5i|=\sqrt{(-2)^2+(5)^2}=\sqrt{29}$

الإحداثيات القطبية : يمثل الزوج المرتب $(r\,,\theta)$ الإحداثيات القطبية M على المستوى المركب
ونعلم أيضاً أن الزوج المرتب (x ,y) يمثل الإحداثيات



الديكارتية للنقطة M في ن

تحويل بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\ \theta$$

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن :

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0 , y > 0 \\ 180^\circ - \alpha : & x < 0 , y > 0 \\ 180^\circ + \alpha : & x < 0 , y < 0 \\ 360^\circ - \alpha : & x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

$$\sin^{-1} \alpha = \left|\frac{y}{r}\right| \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos^{-1} \alpha = \left|\frac{x}{r}\right| \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan^{-1} \alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

حاول أن تحل صـ (27) (2) أوجد الزوج المرتب (x , y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

(b) $B\left(2 , \frac{2\pi}{3}\right)$ **(a)** $A\left(5 , 300^\circ\right)$

الصورة المثلثية : يمكن كتابة العدد المركب z = x + y i على الصورة: $z = r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)$

وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب يستخدم أحيانًا التعبير بدلًا من " الصورة المثلثية " ».''الصورة القطبية''

يسمى r مقياس العدد أو القيمة المطلقة ويرمز إليه أحيانًا بالرمز | z | ويتعين بالعلاقة :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تسمى θ سعة العدد المركب وتتعيّن من $\tan\theta = \left|\frac{y}{x}\right|, x \neq 0\ or\ \sin\theta = \frac{y}{r}\ , \cos\frac{x}{r}$

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت سعة θ العدد المركب $z = x + y\,i$

فإن كلًّا مما يلي سعة للعدد نفسه : $\theta \pm 2\pi\,, \theta \pm 4\pi\ , \dots\dots, \theta \pm \mathrm{k}\pi\ ,\ : k \in \mathbb{N}$

حاول أن تحل صـ (30)

(4) ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

(a) $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - i\frac{5}{\sqrt{2}}$ (b) $z_2 = -1 - i$ (c) $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

الحل :

حاول أن تحل صـ (31) (6) ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية .

(a) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\ \sin\frac{5\pi}{3}\right)$

الحــــل

الصورة المثلثية في حالات خاصة :

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على المحور الحقيقي(محور السينات) .

وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على المحور التخيلي (محور الصادات).

يمثل الجدول التالي الحالات الأربع الخاصة a , b عددان حقيقيان موجبان.

العدد	المقياس	سعة (بالراديان)
a	a	0
-a	a	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
-bi	b	$\frac{3\pi}{2}$

حاول أن تحل ص (32)

(7) ضع في الصورة المثلثية كلًا من الأعداد التالية:

(a) $z_1 = 2i$ (b) $z_2 = 5$ (c) $z_3 = \frac{-3}{4}$ (d) $z_4 = -\frac{5}{2}i$

العدد	المقياس	السعة الأساسية	العدد في الصورة المثلثية
$z_1 = 2i$	$\lvert z_1\rvert = \lvert 2\rvert = 2$	$\frac{\pi}{2}$	$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$
$Z_2 = 5$	$\lvert z_2\rvert = \lvert 5\rvert = 5$	0	$z_1 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$
$Z_3 = \frac{-5}{4}$	$\lvert z_3\rvert = \left\lvert\frac{-5}{4}\right\rvert = \frac{5}{4}$	π	$z_1 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$
$Z_4 = \frac{-5}{2}i$	$\lvert z_4\rvert = \left\lvert\frac{-5}{2}\right\rvert = \frac{5}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$z_1 = 5(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

بنود موضوعية صفحة 12-13

في التمارين (1−6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$ (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135°)$ هي: $B(-1, 1)$ (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ (a) (b)

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ ⓐ ⓑ

(6) السعة الأساسية للعدد $z=\cos 30°+i\cos 240°$ هي $330°$ ⓐ ⓑ

في التمارين (7—13)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

ⓐ $A(2,2\sqrt{3})$ ⓑ $A(-2,2\sqrt{3})$ ⓒ $A(-2,-2\sqrt{3})$ ⓓ $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

ⓐ $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ ⓑ $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ ⓒ $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ ⓓ $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z=2-2\sqrt{3}i$ حيث $\theta\in[0,2\pi)$ هي:

ⓐ $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ⓑ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ⓒ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ⓓ $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z=\frac{-4}{1-i}$ حيث $0\leqslant\theta<2\pi$ هي:

ⓐ $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ⓑ $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓒ $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ⓓ $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0\leqslant\theta<2\pi$ هي:

ⓐ $z=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ ⓑ $z=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓒ $z=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ⓓ $z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2}+i^{2n+8})$ تساوي:

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ -1 ⓓ i^{-2n}

(13) $(6-2i+3i^5)^2$ تساوي:

ⓐ $35-12i$ ⓑ $35+12i$ ⓒ $81-12i$ ⓓ $81+12i$

(3- 7)   حل معادلات

أولًا :حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

حاول أن تحل صـ (33) (1) أوجد مجموعة حل : $2z + 1 - i = 7 + 3i$ المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة :

الحـــــــــــل :

ثانيًا :حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

حاول أن تحل ص (35) (3) أوجد حل كل معادلة مما يلي حيث :

(a) $3x^2 + 48 = 0$ (b) $-5x^2 - 150 = 0$ (c) $8x^2 + 2 = 0$

(a) $3x^2 + 48 = 0$	(b) $-5x^2 - 150 = 0$	(c) $8x^2 + 2 = 0$
$3x^2 = -48$	$-5x^2 = 150$	$8x^2 = -2$
$x^2 = -16$	$x^2 = -30$	$x^2 = -\frac{1}{4}$
$x = \sqrt{-16}$	$x = \sqrt{-30}$	$x = \pm\sqrt{\frac{-1}{4}}$
$x = \pm 4i$	$x = \pm\sqrt{30}i$	$x = \pm\frac{1}{2}i$
$\{-4i, 4i\}$ = مجموعة الحل	$\{-\sqrt{30}I, \sqrt{30}i\}$= مجموعة الحل	$\left\{\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i\right\}$= مجموعة الحل

حاول أن تحل ص (35) (4) أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$: 0 في C.

الحل :

حاول أن تحل صـ (36) (5)لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

(a) أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ (b) أوجد الجذر الثاني.

الحـل

حاول أن تحل ص (37) (6)أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

الحل : ليكن $w = m + n\,i$ جذرًا تربيعيًا للعدد z ، $w^2 = z$

بالتعويض : $(m + n\,i)^2 = 3 - 4i$

فك التربيع $m^2 + 2m\,ni - n^2 = 3 - 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين
$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & (1) \\ 2\,m\,n = -4 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة $|w|^2 = |z|$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$m^2 + n^2 = 5$ (3)

بجمع المعادلتين (1) , (3) $2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

بالتعويض في (1) نحصل على: $1 - n^2 = -3 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$

من المعادلة $2mn = -4$ عكس الإشارة نفسها m, n نستنتج أن

$$m = 1 \ , \ n = -2 \qquad or \ \ m = -1 \ , \ n = 2$$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3 - 4i$ هما $w_1 = 1 - 2\,i$, $w_2 = -1 + 2\,i$

حاول أن تحل ص (38) (7) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$

الحل :

حاول أن تحل صـ (38) (8) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

الحل : ليكن $w = m + n\,i$ جذرًا تربيعيا للعدد z ، $w^2 = z$

بالتعويض : $(m + n\,i)^2 = 7 + 24i$

فك التربيع $m^2 + 2m\,ni - n^2 = 7 + 24i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 7 & (1) \\ 2\,m\,n = 27 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة $|w|^2 = |z|$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 25 \qquad (3)$$

بجمع المعادلتين (3) , (1) $2m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$

بالتعويض في (1) نحصل على: $16 - n^2 = 7 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow n = \pm 3$

من المعادلة $2mn = 24$ نفس الإشارة نفسها m, n نستنتج أن

$m = 4 \;,\; n = 3 \qquad or \;\; m = -4 \;,\; n = -3$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3 - 4i$

هما $w_1 = 4 + 3\,i \qquad , w_2 = -4 - 3\,i$

البنود الموضوعية صفحة 16

في التمارين (1—6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\bar{z} + 2 = 5 - i$ هو: $z = 3 + i$ — (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z + \bar{z} - 3 - 5i = 0$ هو: $z = 1 - 5i$ — (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$ — (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ — (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\; z_2 = -5 - 3i$ — (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ — (a) (b)

في التمارين (7—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

a) $\{2-4i, -2-4i\}$

b) $\{-2+4i, -2-4i\}$

c) $\{2-4i, -2+4i\}$

d) $\{2-4i, 2+4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

a) $\begin{cases} z_1 = -7-4i \\ z_2 = 7+4i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z_1 = 7-4i \\ z_2 = -7+4i \end{cases}$

c) $\begin{cases} z_1 = 7+4i \\ z_2 = 7-4i \end{cases}$

d) $\begin{cases} z_1 = -7-4i \\ z_2 = -7+4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3-4i)z = 5-2i$ هو:

a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}i$

b) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}i$

c) $\frac{23}{25}+\frac{14}{25}i$

d) $\frac{23}{25}-\frac{14}{25}i$

(8-1)التمثيل البياني للدوال المثلثية(الجيب، جيب التمام، الظل)

الدوال الجيبية :

تسمّى الدالة على الصورة $y = a \sin b\, x$ **دالة الجيب** والدالة $a \neq 0 \quad , b \neq 0$

وتسمى الدالة على الصورة $y = a \cos b\, x$ **دالة الجيب التمام** والدالة $a \neq 0 \quad , b \neq 0$

تسمى (1) |a| سعة الدالة الجيبية

(2) |b| عدد الدورات في الفترة $[\,0\,, 2\pi\,)$

(3) $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة .

تدريب (1)

دورة الدالة	سعة الدالة	بيان الدالة
$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$	|a| =|1|=1	شكل (1)
$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert} = \frac{2\pi}{\lvert 3\rvert} = \frac{2\pi}{3}$	|a| =|1|=1	شكل (2)
$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert} = \frac{2\pi}{\lvert 3\rvert} = \frac{2\pi}{3}$	|a| =|2|=2	شكل (3)

حاول أن تحل صـ (46) أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

(a) $y = -2 \cos 5\, x$ (b) $y = \frac{1}{2} \cos(-x)$

الحـل :

$y = -2 \cos 5\, x$

السعة = $|a| = |-2| = 2$ دورة الدالة = $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

$y = \frac{1}{2} \cos(-x)$

السعة = $|a| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

دورة الدالة = $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5}$

حاول أن تحل صـ (46) (1) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a \cos bx$ إذا كانت:

(a) الدورة هي : $\frac{\pi}{3}$, $a = -2$ (b) الدورة هي : π , $a = 0{,}25$

(c) الدورة هي : 2 , $a = 1$

الحـل :

(a) الدورة هي : $\frac{\pi}{3}$, $a = -2$

التمثيل البياني للدوال المثلثية :

أوّلًا: دالة الجيب

الدالة	المجال	المدى	الدورة
y= sin x	$\mathbb{R}$	[-1 ,1]	2π

خواص دالة الجيب :

(1) لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi) = 0$

(2) لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \sin x$ قيمة عظمى عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

قيمة صغرى عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

(3) دالة الجيب دالة فردية لأن $\sin(-x) = -\sin x$

(4) منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.

(5) سعة الدالة هي : $a = \frac{\max f - \min f}{2}$

حاول أن تحل ص (48) (3) أوجد السعة والدورة , ثم ارسم بيان كل من:

(a) $y = \frac{1}{2} \sin 4x$ (b) $y = -4 \sin x \quad , x \in [-\pi, 2\pi]$

الحل :

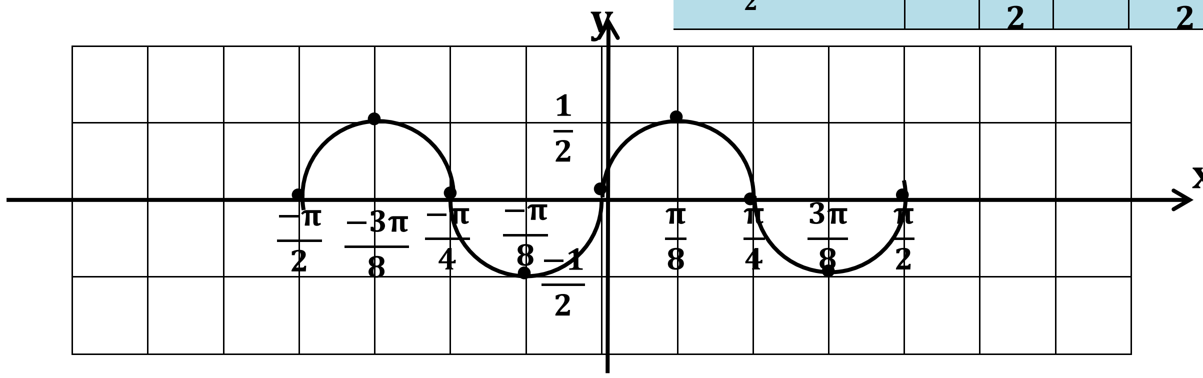
(a) $y = \frac{1}{2} \sin 4x$

السعة هي $\frac{1}{2} = |\frac{1}{2}| = |a|$

دورة الدالة هي $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

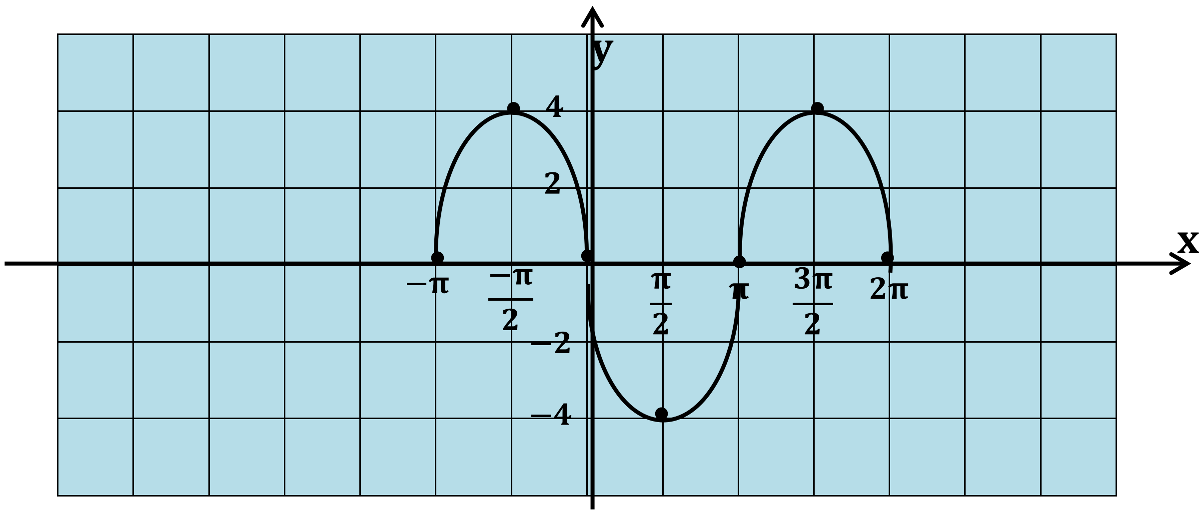
ربع الدورة = $\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{8}$
4x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	π
Sin 4x	0	1	0	-1	0
$y=\frac{1}{2} \sin 4x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



الحل

(b) $y = -4 \sin x \quad , x \in [-\pi, 2\pi]$



ثانياً :دالة الجيب التمام

الدالة	المجال	المدي	الدورة
y= cos x	$\mathbb{R}$	[-1 ,1]	2π

خواص دالة جيب التمام :

(1) لأي عدد صحيح n فإن $\cos (n\frac{\pi}{2}) = 0$

(2) لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \cos x$ قيمة عظمى عند $x = 2n\pi$
قيمة صغري عند $x = \pi + 2n\pi$

(3) **دالة الجيب دالة زوجية لأن** $\cos(-x) = \cos x$

(4) **منحنى الدالة متناظر حول محور الصادات.**

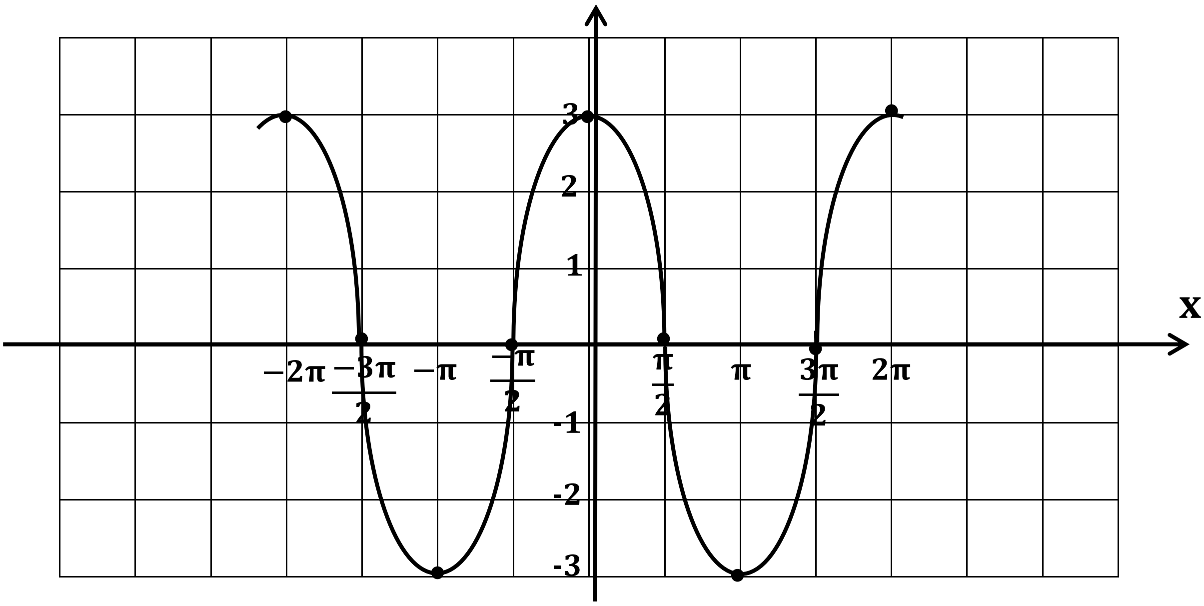
(5) سعة الدالة هي : $a = \frac{\max f - \min f}{2}$

حاول أن تحل صـ (48) *(4)* **أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان كل من:**

(a) $y = 3\cos 2x$ (b) $y = -2\cos\frac{3}{4}x \quad , x \in [0, 2\pi]$

الحل

$y = 3$



(b) $y = -2\cos\frac{3}{4}x \quad , 0 \le x \le 2$